Espaços Métricos

2017

Thaís Jordão
USP - São Carlos

Sumário

Estas notas estão sendo digitadas durante o curso de espaços métricos de 2015 do ICMC e foram baseadas nas notas pessoais da Profa. Alice Kimie Miwa Libardi do IGCE - UNESP. A professora Alice, gentilmente, me emprestou suas notas (escritas a mão e originais) para que eu ministrasse, pela primeira vez, este apaixonante curso. Não posso deixar de creditar à ela a paixão desenvolvida por espaços métricos durante minha graduação na UNESP de Rio Claro. E nem deixar de agradecer a confiança, me emprestando suas notas do curso.

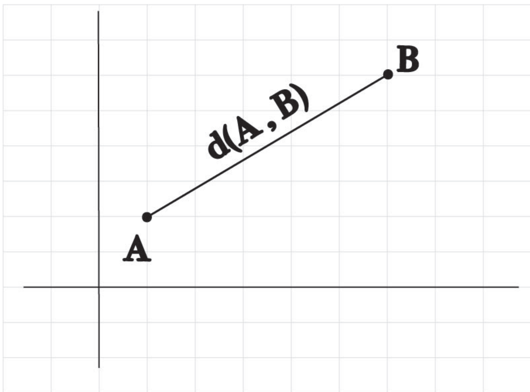
1 De métricas a topologia dos espaços métricos

Um dos objetivos da matemática é classificar objetos. Desta maneira, determinados espaços métricos podem ser colocados numa mesma classe de objetos (classificados, de certa maneira) por um conceito chamado homeomorfismo. Para falarmos em homeomorfismos precisamos falar em continuidade e consequentemente proximidade, portanto distância.

1.1 Espaços métricos: definição e exemplos.

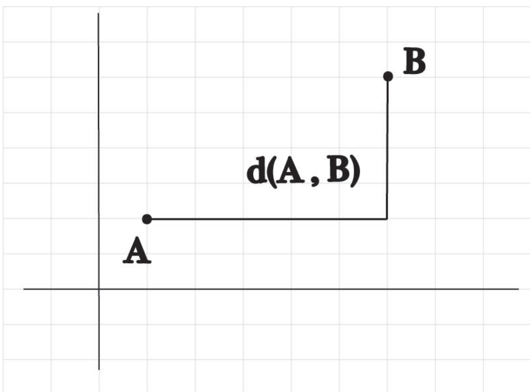
Em Geometria Analítica você aprendeu que a distância entre dois pontos $A = (x_1, x_2)$ e $B = (y_1, y_2)$ do plano é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$



Este "medidor de espaçamento" entre dois pontos, como veremos, é chamado de distância usual em $\mathbb{R}^2$. Agora, se colocarmos um ponto inicial e um final em um GPS, claramente, notará que a distácia determinada pelo aparelho, na maioria dos pontos que testar, não será condizente com a fórmula anterior, a menos que você tenha um helicóptero e posso andar em linha reta passando por cima de casas, prédios, etc.. Isto acontece porque o GPS usa um "medidor de espaçamento" (de distância) entre dois pontos no plano diferente do anterior. Este é dado por

$$d(A, B) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$



Além dos exemplos anteriores, podemos definir $d(A, B)$ de maneira esdrúxula. Dizendo que pontos diferentes sempre distam um, e a distância de um ponto a ele mesmo é (como nossa intuição manda) zero.

O que estas formas têm incomum na maneira de media a distância entre dois pontos é apresentada abaixo numa definição formal.

Definição 1.1. *Seja M um conjunto não vazio. Uma métrica em M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa cada par de pontos do conjunto um número real, chamada distância, satisfazendo:*

- *se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$ e $d(x, x) = 0$, $x, y \in M$;*
- *$d(x, y) = d(y, x)$, $x, y \in M$;*
- *$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $x, y, z \in M$ (desigualdade triangular).*

O par (M, d) é chamado espaço métrico.

Lembrando dos exemplos motivacionais no plano ($\mathbb{R}^2$) podemos definir as seguintes métricas:

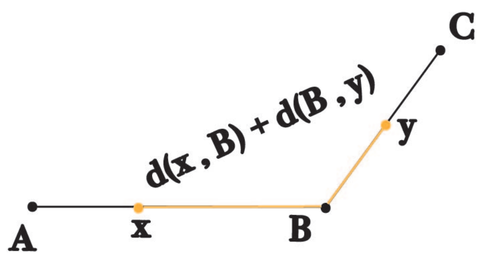
- $d_1(A, B) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ (métrica usual);

- $d_2(A, B) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ (métrica da soma);

- $d_3(A, B) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ (métrica do máximo ou do GPS);

- $d_d(A, B) := 1$, se $A \neq B$, e $d_d(A, A) = 0$ (métrica discreta).

Exemplo 1.2. Além das métricas anteriores, no subconjunto π de $\mathbb{R}^2$ formado por uma poligonal ABC, com A, B e C pontos não colineares, como na figura abaixo, podemos definir a seguite métrica.



Se dois pontos estão num mesmo segmento da poligonal ($\overline{AB}$ ou $\overline{BC}$), a distância entre eles é a distância usual. Se eles estão em segmentos distintos, então a distância é a soma das distâncias nos segmentos. Por exemplo, se $x \in \overline{AB}$ e $y \in \overline{BC}$ então

$$d(x, y) = d(x, B) + d(B, y).$$

Neste caso, a função definida acima é uma métrica em π.

No espaço euclidiano de dimensão superior a 2, as métricas d_1, d_2, d_3 e d_d generalizam-se naturalmente como a seguir. Sejam $A = (x_1, x_2, \cdots, x_n), B = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

- $d_1(A, B) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ (métrica usual);

- $d_2(A, B) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$ (métrica da soma);

- $d_3(A,B) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \cdots, |x_n - y_n|\}$ (métrica do máximo ou do GPS).

Motivados pelos exemplos vistos até agora, podemos induzir uma métrica no cartesiano de dois espaços métricos como fizemos no espaço euclidiano. Afinal, usamos a métrica (induzida pela norma) da reta real para definirmos as métricas usual, do máximo e do GPS. O caso geral, onde não necessariamente temos uma norma presente, é o seguinte.

Exemplo 1.3. Se (M_1, γ_1) e (M_2, γ_2) são espaços métricos, então $(M_1 \times M_2, \delta_i)$ é um espaço métrico para $i = 1, 2, 3$, onde:

- $\delta_1(A,B) := \sqrt{\gamma_1^2(x_1,y_1) + \gamma_2^2(x_2,y_2)}$, $\quad A = (x_1,x_2), B = (y_1,y_2) \in M_1 \times M_2$;

- $\delta_2(A,B) := \gamma_1(x_1,y_1) + \gamma_2(x_2,y_2)$;

- $\delta_3(A,B) := \max\{\gamma_1(x_1,y_1), \gamma_2(x_2,y_2)\}$.

A diferença básica deste exemplo para o caso do espaço euclidiano é que aqui os espaços podem não ser normados. E quando temos uma norma presente, induzimos naturalmente uma métrica no conjunto de estudo como no seguinte exemplo.

Exemplo 1.4. Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Podemos munir V de uma estrutura métrica definindo $d : V \times V \to \mathbb{R}$ por

$$d(v,w) := \|v - w\|, \quad v, w \in V,$$

e (V, d) é um espaço métrico.

De fato, se $v \neq w$, então $v - w \neq 0$ e, sendo $\|\cdot\|$ uma norma, necessariamente $\|v - w\| > 0$. Também, se $\|v - w\| = 0$, claramente $v - w = 0$ e $v = w$. Com isso verificamos o primeiro item necessário para que d seja uma métrica.

O segundo passo é verificar a reflexividade (segundo item da definição), para isso observemos que

$$\|v - w\| = \|(-1)(w - v)\| = |(-1)|\|w - v\| = |\|w - v\|,$$

justificando a igualdade $d(v,w) = d(w,v)$, $v, w \in V$.

Finalmente, a desigualdade triangular, segue diretamente da propriedade da norma dada por $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, uma vez que

$$d(v,w) = \|v-w\| = \|(v-u)+(u-w)\| \leq \|(v-u)\|+\|(u-w)\| = d(v,u)+d(u,w), \quad u, v, w \in V.$$

Em todos os exemplos vistos até este momento o conjunto onde definimos a norma, é sabido possuir alguma estrutura préviamente conhecida, mesmo que isso não tenha sido explicitado até aqui. Contudo, é possível definir uma métrica (mesmo que ela não seja muito “útil”no sentido geométrico de verificação de proximidade) em qualquer conjunto não vazio que considerar. Este é o conteúdo do seguinte exemplo.

Exemplo 1.5. Seja X um conjunto não vazio Definimos $e : X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$e(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y; \\ 0, & \text{se } x = y, \end{cases}$$

e (X, e) é um espaço métrico.

Claramente $e(x, y) \geq 0$, $x, y \in X$ e $e(x, y) = 0$ se, e somente se $x = y$. Com isso verificamos a primeira condição necessária para que e, de fato, seja uma métrica. A segunda, $e(x, y) = e(y, x)$, $x, y \in X$, também é de direta verificação.

Resta-nos verificar a desigualdade triangular e para isso sejam, $x, y, z \in X$.

Se $e(x, y) = 1$, então $x \neq y$ e, necessariamente, $x \neq z$ ou $x \neq y$, em qualquer caso

$$e(x, z) + e(z, y) \geq 1 = e(x, y).$$

Agora, se $e(x, y) = 0$

$$e(x, z) + e(z, y) \geq 0 = e(x, y).$$

Portanto, e é uma métrica em X.

A métrica do exemplo anterior é usualmente denominada métrica *zero-um* ou *discreta.*

Os exemplos anteriores geram um gama de exemplos de espaços métricos que já foram visto em outros contextos e não, necessariamente, com enfoque (estrutura) aqui dado. Em todos estes exemplos, bem como no caso abstrato, podemos induzir uma métrica num subconjunto de um espaço métrico, préviamente dado. Com isso, carregamos a estrutura métrica para um subconjunto e vemos este subconjunto como um espaço métrico também.

Para isso precisamos relembrar que dada uma aplicação $f : A \to B$, de conjunto A em outro B, se $S \subset A$, então restrição de f a S, denotada por $f|_S$ é dada por $f|_S = f \circ i$, onde $i : S \to A$ é a inclusão $i(x) = x$, $x \in S$. Desta maneira, induzimos naturalmente uma métrica num subconjunto de um espaço métrico dado, como a seguir.

Definição 1.6. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $S \neq \emptyset$ um subconjunto de M. A métrica induzida por d em S é $d_S = d \circ i$ onde $i : S \times S \to M \times M$ é a inclusão no produto cartesiano.*

O par (S, d_S) é um espaço métrico chamado subespaço métrico de M.

Além de induzir métricas em subconjuntos de um espaço métrico podemos também gerar métricas a partir de outras como no exemplo a seguir.

Exemplo 1.7. Sejam (M, d) um espaço métrico e $k > 0$ um número real. A aplicação em $M \times M$ dada por $d_k(x, y) = kd(x, y)$ é uma métrica em M.

A métrica d_k é chamada *dilatação* da métrica d.

A dilação de uma métrica, necessariamente, deve ser por uma constante positiva. Caso contrário a função resultante d_k deixa de ser métrica.

1.2 Bolas: conjuntos limitados

Nesta seção definiremos ferramentas básicas que nos permitirão na próxima seção olhar qualquer espaço métrico "dentro"de um espaço vetorial normado, uma espécie de recíproca do exemplo 1.4. Não menos importante, as ferramentas aqui definidas nos permitirão falar na topologia dos espaços métricos e, consequentemente, em continuidade de funções definidas sobre estes espaços.

Definição 1.8. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $r > 0$ um número real. Dado $a \in M$ o subconjunto*

- $B(a,r) := \{x \in M : d(a,x) < r\}$ *é chamado bola aberta de centro a e raio r;*
- $D(a,r) := \{x \in M : d(a,x) \leq r\}$ *é chamado bola fechada (disco) de centro a e raio r;*
- $S(a,r) := \{x \in M : d(a,x) = r\}$ *é chamado esfera de centro a e raio r;*

Os seguintes exemplos ilustram que conjuntos são estes em espaços métricos bem conhecidos.

Exemplo 1.9. Considere $\mathbb{R}$ munido da métrica usual. Sejam $a,\, r \in \mathbb{R}$ com $r > 0$, temos:

- $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |a-x| < r\} = (a-r, a+r)$ é um intervalo aberto;

- $D(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |a-x| \leq r\} = [a-r, a+r]$ é um intervalo fechado;

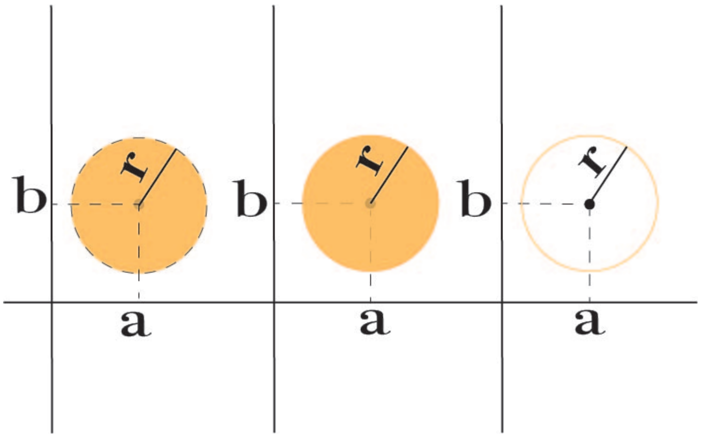
- $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |a-x| = r\} = \{a-r, a+r\}$ é um conjunto formado por dois pontos.

Exemplo 1.10. Considere $\mathbb{R}^2$ munido da métrica usual. Sejam $c = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$ um número real, temos:

- $B(c,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} < r\}$ é a parte interior delimitada pelo círculo de centro (a,b) e raio r;

- $D(c,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} \leq r\}$ é a parte interior delimitada pelo círculo de centro (a,b) e raio r unida ao círculo;

- $S(c,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = r\}$ é o círculo de centro (a,b) e raio r.



Para subespaços métricos temos o seguinte.

Exemplo 1.11. Considere $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ munido da métrica induzida pela usual da reta. Usaremos o subíndice $\mathbb{Z}$ para significar que estamos considerando os conjuntos do subespaço. Sejam $a \in \mathbb{Z}$ e $r > 0$ um número real, temos:

$$B_{\mathbb{Z}}(a,r) = \{x \in \mathbb{Z} : |a-x| < r\} = \mathbb{Z} \cap (a-r, a+r).$$

Assim, $B_{\mathbb{Z}}(1,2) = \mathbb{Z} \cap (-1,3) = \{0,1,2\}$ e $B_{\mathbb{Z}}(0,1) = \mathbb{Z} \cap (-1,1) = \{0\}$.

A propriedade anterior, onde conjuntos formados por apenas um ponto podem ser vistos como bolas, é contemplada na definição a seguir.

Definição 1.12. *Um ponto $a \in M$ de um espaço métrico (M, d) é isolado se existe $r > 0$, um número real, tal que $B(a, r) = \{a\}$.*

Se todos os pontos de um espaço métrico são isolados, então o espaço métrico é dito discreto.

Não é de difícil verificar que todo conjunto não vazio munido da métrica zero-um (discreta) é um espaço métrico discreto. De fato, podemos isolar todos os pontos deste espaço com bolas de raio $1/2$. A mesma técnica garante que o exemplo seguinte é um espaço métrico discreto.

Exemplo 1.13. Considere $\mathbb{Z}$ com a métrica induzida pela usual de $\mathbb{R}$. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos $B_{\mathbb{Z}}(n, \frac{1}{2}) = \{n\}$, ou seja, todo ponto é isolado.

Esta propriedade, todo ponto é isolado, não é regra em espaços métricos, exceto de dotarmos este da métrica discreta. Contudo, separar dois pontos distintos por meio de bolas, como visto no exemplo anterior, é sempre possível como verificaremos a seguir.

Proposição 1.14. *Todo espaço métrico (M, d) é um espaço de Hausdorff, ou seja, dados $x, y \in M$ distintos existe $r > 0$, um número real, tal que $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in M$ distintos. Consideremos $r = \frac{d(x,y)}{2} > 0$ e mostremos que $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. Se $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$, então $d(z, x) < r$ e $d(z, y) < r$ o que geraria o seguinte absurdo

$$2r = d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y) < 2r.$$

Portanto, $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. ■

As noção de métrica, e consequentemente de bolas, nos é útil para podermos definir a noção de limitação em espaços métricos como veremos na sequência.

Definição 1.15. *Um subconjunto B de M, (M, d) um espaço métrico, é limitado se existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$, $x, y \in B$.*

Não é difícil ver que toda bola num espaço métrico é um subconjunto limitado, já que a distância entre quaisquer dois pontos não ultrapassa o dobro do raio da bola. Além disso, todo subconjunto limitado de um espaço métrico está contido em alguma bola.

Um métrica também nos permite medir distânica de um ponto a um subconjunto, entre dois subconjuntos bem como falar em diâmetro de um subconjunto. Todas estas noções a serem desenvolvidas generalizam as já sabidas de cursos anteriores, por exemplo, a distância de um ponto a uma reta (Geometria Diferencial) ou diâmetro de uma circunferência.

Antes de prosseguirmos relembremos o que é o supremo e o ínfimo de um subconjunto limitado da reta.

Observação 1.16. Seja $L \subset \mathbb{R}$ limitado.

Um número $s \in \mathbb{R}$ é o *ínfimo* de L, e denotado por $s = \inf L$, se ele é o maior dos limitantes (cotas) inferiores de L, ou seja, satisfaz:

- para todo $x \in L$, $s \leq x$;

- para todo $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in L$ tal que $x_\epsilon < s + \epsilon$.

E um número $S \in \mathbb{R}$ é o *supremo* de L, e denotado por $S = \sup L$, se ele é o menor dos limitantes (cotas) superiores de L, ou seja, satisfaz:

- para todo $x \in L$, $x \leq S$;

- para todo $\epsilon > 0$, existe $y_\epsilon \in L$ tal que $S - \epsilon < y_\epsilon$.

Definição 1.17. *Se subconjunto B é um subconjunto limitado de M, (M, d) um espaço métrico, seu diâmetro é definido como:*

$$diam\, B := \sup\{d(x, y) : x, y \in B\}.$$

Se B for ilimitado, então definimos $diam\, B = \infty$.

Quando nos restringimos aos limitados dados por bolas abertas (e fechados) em um espaço métricos, por exemplo $\mathbb{R}^2$, é possível perceber que esta noção de diâmetro coincide com a já conhecida (dobro do raio).

Definição 1.18. *Sejam (M, d) um espaço métrico, A e B subconjunto de M e $p \in M$.*

- *A distância de p ao subconjunto A é*

$$d(p, A) := \inf\{d(p, a) : a \in A\}.$$

- *A distância entre os subconjuntos A e B é*

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A\, e\, b \in B\}.$$

E nesta caso, quando nos restringimos a $\mathbb{R}^2$ munido da métrica usual, é possível perceber que esta noção de distância de um ponto a um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ coincide com a já conhecida na Geometria Diferencial.

Observação 1.19. Nas notações da definição anterior, se $p \in A$, então (como nossa intuição manda) $d(p, A) = 0$.

E se $X \subset A$, então $d(p, A) \leq d(p, X)$. De fato, como

$$\{d(p, x) : x \in X\} \subset \{d(p, a) : a \in A\},$$

temos

$$d(p, X) = \inf\{d(p, x) : x \in X\} \geq \inf\{d(p, a) : a \in A\} = d(p, A).$$

1.3 Imersões Isométricas

As imersões isométricas merecem uma subseção só delas pela importância que exercem nos métodos para induzir métricas em determinados conjuntos que possuem alguma relação com um espaço métrico. Além disso, elas nos permitirão exibir uma espécie de recíproca do exemplo 1.4. Isto significará mostrar que todo espaço métrico pode ser visto “dentro” de um espaço vetorial normado. Mesmo que ele não tenha nenhuma estrutura de espaço vetorial.

Definição 1.20. *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *dois espaços métricos. Uma aplicação* $f : M \to N$ *é uma imersão isométrica se*

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y), \quad x, y \in M.$$

Nesta caso, dizemos que f *preserva distância.*

As imersões isométricas também já apareceram em contextos anteriores como podemos ver nos exemplos abaixo.

Exemplo 1.21. As translações no espaço euclidiano (munido da métrica usual) são imersões isométricas.

Exemplo 1.22. As rotações em $\mathbb{R}^2$ (munido da métrica usual) por um ângulo ϕ digamos,

$$f(x, y) = (x \cos\phi - y \sin\phi, x \sin\phi + y \cos\phi), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

são imersões isométricas.

O fato de uma aplicação ser uma imersão isométrica implica, automaticamente, que ela é injetora. De fato, se $x, y \in M$ são tais que $f(x) = f(y)$, então $0 = d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$ e $x = y$. Se, adicionalmente, ela for sobrejetora como no exemplo 1.21, então chamamos esta de *isometria.*

Observação 1.23. Sejam X um conjunto e (M, d) um espaço métrico.

Se X e M estão relacionados por um função injetiva, ou seja, existe $f : X \to M$ injetora, então *é possível induzir uma métrica em* X de tal maneira que f seja uma imersão isométrica. Definimos $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$d_X(x, y) := d(f(x), f(y)), \quad x, y \in X.$$

Esta métrica é chamada *métrica induzida por* f.

Observe a necessidade de f ser injetora para podermos verificar a primeira condição exigida na definição de métrica para d_X. Além disso, esta técnica, para induzir métricas por meio de uma aplicação injetora, já foi previamente usada na definição de subespaço métrico (definição 1.6). Lá, X era um subconjunto do espaço métrico e f injetora, era a inclusão.

Como vimos no exemplo 1.4 todo espaço vetorial normado é um espaço métrico, quando usamos a norma do espaço para induzir uma métrica. Porém, nem todo espaço métrico carrega uma estrutura de espaço vetorial. Contudo, todo espaço métrico pode ser imerso isometricamente em um espaço vetorial normado e para finalizarmos esta seção demonstrando este resultado precisamos de algumas definições.

Definição 1.24. *Sejam* X *um conjunto e* (M, d) *um espaço métrico. Dizemos que uma aplicação* $f : X \to M$ *é limitada se o subconjunto* $f(X)$ *é limitado em* M*. Assim, definimos o conjunto das funções limitadas em* X *por*

$$B(X, M) := \{f : X \to M : f \text{ é limitada}\}.$$

No caso particular em que M é a reta munida da métrica usual, podemos operar (somar e multiplicar por escalar) elementos de $B(X,\mathbb{R})$ e isso nos permite considerá-lo com uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Neste espaço definimos $\|\cdot\| : B(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in X\},$$

e $(B(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado.

Com isso e definindo por $d_x := d(x,\cdot)$ a função de uma variável obtida a partir de uma métrica d fixando umas das variáveis, estamos aptos a demonstrar o seguinte resultado

Teorema 1.25. *Todo espaço métrico pode ser imerso isometricamente em um espaço vetorial normado.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes. Quando o espaço métrico em questão é limitado (para captarmos a ideia básica da prova) e quando não, necessariamente, é.

Seja (M,d) um espaço métrico e M limitado. Nesta caso, para todo $x \in M$, a funaõ $d_x : M \to \mathbb{R}$ é limitada, logo pertence a $B(M,\mathbb{R})$. Mostremos que $\varphi : M \to B(M,\mathbb{R})$ dada por

$$\varphi(x) := d_x, \quad x \in M$$

é uma imersão isométrica, ou seja, que φ preserva distância. Para isso observemos que se d_B denota a distância induzida pela norma em $B(M,\mathbb{R})$, então

$$d_B(\varphi(x),\varphi(y)) = \|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|d_x - d_y\| = \sup\{|d(x,z) - d(y,z)| : z \in M\}.$$

Como $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$, $z \in M$, temos $\|d_x - d_y\| \leq d(x,y)$ e consequentemente

$$d_B(\varphi(x),\varphi(y)) = \sup\{|d(x,z) - d(y,z)| : z \in M\} \leq d(x,y).$$

Além disso, $d(x,y) \leq \sup\{|d(x,z) - d(y,z)| : z \in M\}$ pois $d(x,y) = |d(x,y) - d(y,y)|$, logo $\|d_x - d_y\| = d(x,y)$ e, portanto, φ satisfaz

$$d_B(\varphi(x),\varphi(y)) = d(x,y), \quad x,y \in M,$$

e é uma imersão isométrica.

Agora, se M não, necessariamente, é limitado temos garantias da limitação da função d_x para $x \in M$. Para desviramos deste problema fixamos $a \in M$ e definimos $\beta : M \to B(M,\mathbb{R})$ por

$$\beta(x) := d_x - d_a, \quad x \in M.$$

Como

$$|\beta(x)(y)| = |d_x(y) - d_a(y)| = |d(x,y) - d(a,y)| \leq d(x,a), \quad y \in M,$$

temos $\beta(x) \in B(M,\mathbb{R})$, $x \in M$, e β está bem definida. Dados $x,y \in M$ temos

$$d_B(\beta(x),\beta(y)) = \|(d_x - d_a) - (d_y - d_a)\| = \|d_x - d_y\| = d(x,y),$$

portanto β é uma imersão isométrica. ■

1.4 Topologia dos espaços métricos

No estudo de continuidade de funções o que importa é a classe de determinados subconjuntos (os abertos) do espaço gerada a partir de uma métrica. Tais subconjuntos geram um classe suficientemente boa que nos permitirá desenvolver o conceito de continuidade, que coincidirá com o que já conhece em casos particulares, na próxima seção.

Definição 1.26. *Seja (M,d) um espaço métrico.*

- *Um subconjunto A de M é aberto se para todo $a \in A$, existir $r > 0$ um número real tal que $B(a,r) \subset A$.*
- *Um subconjunto F de M é fechado se $F^c = M - F$ é aberto.*

Os intervalos abertos da reta real são subconjuntos abertos neste espaço com a métrica usual. Verifiquemos formalmente esta afirmação para um intervalo particular.

Exemplo 1.27. O intervalo $(0,1)$ é aberto em $\mathbb{R}$. E a união $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ é fechado em $\mathbb{R}$.

De fato, dado $x \in (0,1)$ seja $2r = \min\{x, 1-x\}$. Para todo $y \in B(x,r) = (x-r, x+r)$ temos

$$y > x - r \geq x/2 > 0 \text{ e } y < x + r \leq x + \frac{1-x}{2} = \frac{x+1}{2} < 1,$$

ou seja, $y \in (0,1)$. Portanto, $B(x,r) \subset (0,1)$.

Mais geralmente, temos o seguinte.

Exemplo 1.28. Toda bola aberta em um espaço métrico é aberto.

Sejam (M,d) um espaço métrico, $a \in M$ e $r > 0$ um número real. Para todo $y \in B(a,r)$ seja $2s = \min\{d(x,y), r - d(x,y)\}$ e mostremos que $B(y,s) \subset B(a,r)$.

Seja $z \in B(y,s)$, temos

$$d(z,a) \leq d(z,y) + d(y,a) < s + r \leq \frac{r - d(x,y)}{2} + r \leq s + r$$

Terminar

Em subespaços métricos também temos estes conceitos que são dados via a métrica induzida do espaço.

Definição 1.29. *Sejam (M,d) um espaço métrico e S um subconjunto de M.*

- *Um subconjunto $V_S \subset S$ é aberto em S se $V_S = A_M \cap S$, onde A_M é um aberto em M.*
- *Um subconjunto $U_S \subset S$ é fechado em S se $U_S = F_M \cap S$, onde F_M é um fechado em M.*

Esta definição nos diz que os abertos (fechados) de um subspaço métrico são os abertos (fechados) do espaço intercção o subespaço. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.30. Considere a esfera de $\mathbb{R}^3$, $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. A calota $C = \{w \in S^2 : d_g(P,w) \leq r\}$, onde d_g é a distância geodésica, ou seja, $d_g(w,z) := \text{arccos}\,|w-z|$ em S^2 e $P = (0,0,1)$ o polo norte, é um aberto em S^2.

De fato, $C = B(P,r) \cap S$ onde $B(P,r)$ é uma bola em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 1.31. Considere $S = [0, 1)$ o intervalo semiaberto da reta.
- $[0, \frac{1}{2})$ é aberto em S (e não é em $\mathbb{R}$) pois $[0, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap S$;
- $[\frac{1}{2}, 1)$ é fechado em S (e não é em $\mathbb{R}$) pois $[\frac{1}{2}, 1) = [\frac{1}{2}, 1] \cap S$.

A classe dos subcojuntos abertos de um espaço métrico satisfaz as seguintes propriedades, que significa ser uma topologia no espaço métrico.

Proposição 1.32. *Seja τ a coleção de todos os subconjuntos abertos de um espaço métrico (M, d). Então*
i) $\emptyset, M \in \tau$;
ii) se $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, então $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \tau$;
iii) se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é tal que $A_\lambda \in \tau$, $\lambda \in I$, $\cup_{\lambda \in I} A_\lambda \in \tau$.

Demonstração.

■

Observemos que se A é um aberto de M, então para todo $x \in A$, existe $r_x > 0$, um número real tal que $B(x, r_x) \subset A$. Assim,

$$A = \cup_{x \in A} B(x, r_x).$$

Com isso, uma consequência direta do resultado anterior é a seguinte.

Corolário 1.33. *Um sobconjunto de uma espaço métrico é aberto se, e somente se, ele é a reunião de bolas abertas.*

Observação 1.34. A interseção infinita de abertos pode não ser uma aberto.

Por exemplo, se considerarmos as bolas abertas da reta munida da métrica usual, centradas no zero e raio $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_*$, temos

$$\{0\} = \cap_{n \in \mathbb{N}_*} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right),$$

que não é aberto em $\mathbb{R}$.

Mais geralmente, em um espaço métrico (M, d), dado $a \in M$ temos

$$\{a\} = \cap_{n \in \mathbb{N}_*} B\left(a, \frac{1}{n}\right),$$

que só é aberto se a for um ponto isolado.

A Proposição 1.32 tem outra consequência direta, dada a seguir.

Corolário 1.35. *Seja (M, d) um espaço métrico.*
i) $\emptyset$ e M são fechados;
ii) a união finita de fechados é fechada;
iii) a intersecção qualquer de fechados é fechada.

Dado um subconjunto se um espaço métrico, mesmo que ele não seja aberto podemos associá-lo a um aberto, construído partir do original. E para esta construção a seguinte definição se faz necessária.

Definição 1.36. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Um ponto $x \in M$ é interior de X se existe um número real $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset X$.*

O conjunto de todos os pontos interiores de X é chamado interior de X e denotado por $\mathring{X}$ ou $int X$.

Não é difícil ver que o interior de um conjunto é um aberto e ele pode ser útil na caracterização dos abertos de um espaço métrico. Afinal, um subconjunto X é aberto se, e somente se, $\mathring{X} = X$, ou seja, coincide com seu interior.

Também, podemos associar um fechado a um dado subconjunto de um espaço métrico.

Definição 1.37. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Um ponto $x \in M$ é aderente a X se para todo número real $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap X \neq \emptyset$.*

O conjunto de todos os pontos aderentes a X é chamado fecho de X e denotado por $\overline{X}$.

Nesta caso, o fecho de um subconjunto é sempre um fechado do espaço métrico onde ele mora e podemos usá-los para caracterizarmos os fechados. Pois um subcojunto X é fechado se, e somente se, $\overline{X} = X$.

De fato, é claro que $X \subset \overline{X}$ sempre. Se X é fechado e $x \in \overline{X}$ então não existe uma bola centrada em x contida no complementar de X. Se $x \notin X$ isto haveria de acontecer já que X^c é aberto. Logo, $x \in X$ e consequentemente, $\overline{X} \subset X$.

Definição 1.38. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Um ponto $a \in M$ é de acumulação de X se para todo número real $r > 0$ tal que $B(a, r) - \{a\} \cap X \neq \emptyset$.*

O conjunto de todos os pontos de acumulação de X é chamado derivado de X e denotado por X.

A noção de sequência pode ser definida neste contexto e é muito útil na caracterização de alguns conjuntos definidos nesta seção. Posteriormente será utilizadas para outros fins como, por exemplo, para dar uma equivalência a definição de continuidade num ponto como veremos em breve.

1.5 Sequências e métricas equivalentes

Uma sequência em um espaço métrico (M, d) é uma função cujo o domínio é o conjunto dos números naturais e contradomínio o espaço métrico, ou seja, $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow M$ onde $n \mapsto \phi(n) = x_n \in M$. Denotamos um sequência em M simplesmente por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ou $\{x_n\}$. definir subsequencia

Definição 1.39. *Uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em um espaço métrico (M, d) é convergente se existe $a \in M$ tal que apara todo $\epsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal maneira que $n \geq n_0$ implica $d(x_n, a) < \epsilon$. Neste caso, escrevemos $x_n \to a$ ou a é o limite de $\{x_n\}_n$.*

Assim, como para sequências de números reais temos a unicidade do limite aqui.

Observação 1.40. Se a e b são limites de uma sequência $\{x_n\}$. Suponhamos que $a \neq b$, então tomamos $\epsilon = d(a, b)/2 > 0$, então existe n_0 em $\mathbb{N}$ de tal maneira que para $n \geq n_0$

$$d(x_n, a) < \epsilon \text{ e } d(x_n, b) < \epsilon.$$

Assim, para todo $n \geq n_0$ temos

$$d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) < 2\epsilon = d(a,b),$$

gerando o absurdo que que um número real positivo é estritamente menor que ele mesmo. Portanto, a deve ser igual a b e o limite de uma seqência convergente é único.

Definição 1.41. *Uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço métrico (M,d) é limitada se o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em M.*

Outra propriedade das sequências convergentes já conhecida em outros contextos é a seguinte.

Proposição 1.42. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ é uma sequência limitada de um espaço métrico (M,d). Se $a \in M$ é tal que $x_n \to a$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que se $n \geq n_0$, então $d(x_n,a) < 1$. o que significa que para $n \geq n_0$, $x_n \in B(a,1)$.

Agora, seja $r = \max\{1, d(a,x_i) : i = 0, \ldots n_0 - 1\}$, temos $x_n \in B(a,2r)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B(a,2r)$. Portanto, $\{x_n\}$ é limitada. ■

A recíproca, com bem sabido, não é verdadeira.

Definição 1.43. *Uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço métrico (M,d) é de Cauchy se dado $\epsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m,n \geq n_0$, então $d(x_n,x_m) < \epsilon$.*

Observação 1.44. Não é difícil mostrar que toda sequência convergente é de Cauchy. Porém, a recíproca não é verdadeira como podemos observar nos exemplos a seguir.

Considere $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números racionais, como subespaço métrico de $\mathbb{R}$, munido da métrica induzida pela usual da reta. Existe uma sequência $\{x_n\}$ de números racionais tal que $x_n \to \sqrt{2}$ (em $\mathbb{R}$). Logo, $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ porém não é convergente neste espaço.

Outro exemplo, é o seguinte: considere o intervalo $(0,1)$ como subespaço métrico de $\mathbb{R}$, munido da métrica induzida pela usual da reta. A sequência $\{1/n\}$ é tal que $1/n \to 0$ (em $\mathbb{R}$). Assim, $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $(0,1)$ porém, não convergente neste espaço uma vez que $0 \notin (0,1)$.

Uma condição necessária para que uma sequência de Cauchy seja convergente é dada abaixo.

Proposição 1.45. *Seja (M,d) um espaço métrico. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e possui uma subsequência convergente, então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em (M,d).*

Demonstração. escrever ■

Alguns dos conjuntos definidos na seção anterior, como fecho e aderente, podem ser caracterizados via sequências da seguinte maneira.

Dado um subconjunto X de uma espaço métrico (M,d), seu fecho $\overline{X}$ é o conjunto de todos os pontos de M tais que existe um sequência em X convergindo para ele. Ou seja,

$$\overline{X} = \{x \in M : \text{existe } \{x_n\} \text{ em } X \text{ tal que } x_n \to x\}.$$

De fato, sejam $x \in \overline{X}$ e $n \in \mathbb{N}$, como $B(x,1/n) \cap X \neq \emptyset$, existe $x_n \in X$ tal que $d(x_n,x) < 1/n$. Logo, a sequência $\{x_n\}$ em X é tal que $x_n \to x$. Por outro lado, suponha $x \in M$ sendo o limite de uma sequência $\{x_n\}$ de X. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal maneira que $n \geq n_0$ implica $d(x_n, x) < \epsilon$, ou seja, $x_n \in B(x, \epsilon) \cap X$, para $n \geq n_0$. Assim, $x \in \overline{X}$.

Já o conjunto aderente tem uma caracterização semelhante, cuja demostração é deixada a cargo do leitor:

$$X' = \{x \in M : \text{existe } \{x_n\} \text{ de pontos dois a dois distintos em } X \text{ tal que } x_n \to x\}.$$

Podemos definir a seguinte noção a respeito de um mesmo conjunto M munido de duas métricas. Esta relação basicamente estabelece que tais duas métricas se equivalem se elas determinam os mesmos abertos em M. Formalmente:

Definição 1.46. *Sejam M um conjunto, d_1 e d_2 métricas em M. Dizemos que as métricas são equivalentes se dado $a \in M$ e $\epsilon > 0$ se cumprir*

$$B_{d_1}(a, \delta_1) \subset B_{d_2}(a, \epsilon), \text{ para algum } \delta_1 > 0 \text{ e}$$

$$B_{d_2}(a, \delta_2) \subset B_{d_1}(a, \epsilon), \text{ para algum } \delta_2 > 0.$$

Além de determinarem os mesmos abertos de um espaço métrico, métricas equivalentes, também, preservam a convergência de sequências.

Proposição 1.47. *Sejam M um conjunto, d_1 e d_2 métricas equivalentes em M. Uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de (M, d_1) é convergente se, e somente se, é convergente em (M, d_2).*

Demonstração. Suponha $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente em (M, d_1) e seja x seu limite. Dado $\epsilon > 0$ sejam $\delta_1 > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$B_{d_1}(x, \delta_1) \subset B_{d_2}(x, \epsilon) \quad \text{e} \quad d_1(x_n, x) < \delta_1, \quad n \geq n_0.$$

Segue que $d_2(x_n, x) < \epsilon$, $n \geq n_0$. A recíproca é análoga e fica a cargo do leitor. ∎

1.6 Exercícios

1. Mostre que $(\mathbb{R}^n, d_i)$ é um espaço métrico para $i = 1, 2, 3$, métrica usual, do máximo e do GPS, respectivamente. Mostre que estas métricas são equivalentes duas a duas.

2. Mostre que $(M_1 \times M_2, \delta_i)$, do exemplo 1.3, é um espaço métrico para $i = 1, 2, 3$.

3. Mostre que o par (S, d_S) da definição 1.6 é, de fato, um espaço métrico.

4. Mostre que o par (M, d_k) do exemplo 1.7 é um espaço métrico e se $k \leq 0$, então d_k não é uma métrica em M.

5. Mostre que todo subconjunto limitado de um espaço métrico está contido em alguma bola do espaço. Mostre que métricas equivalente determinam os mesmos limitados.

6. Dê um exemplo mostrando que no Corolário 1.35 em *ii*) "união finita" não pode ser substituída por "união qualquer".

7. Mostre que $\overline{X} = X \cup X'$.

8. Mostre que

$$X' = \{x \in M : \text{existe } \{x_n\} \text{ de pontos dois a dois distintos em } X \text{ tal que } x_n \to x\}.$$

2 Continuidade

A partir desta seção usaremos a notação (M, d_M) e (N, d_N) para espaços métricos arbitrários e passaremos a omitir a métrica quando isso não for causar confusão.

A partir daqui diremos que uma vizinhança de um ponto $a \in M$ é um aberto V_a de M tal que $a \in V_a$. Por exemplo, qualquer bola centrada no ponto a é um vizinhança de a. Esta noção de proximidade nos permite definir o conceito de continuidade me espaço métrico como a seguir.

Definição 2.1. *Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é contínua em um ponto $a \in M$ se para toda vizinhança $V_{f(a)}$ de $f(a)$ em N existir uma vizinhança V_a de a em M tal que $f(V_a) \subset V_{f(a)}$.*

Se esta condição não se cumpre, então dizemos que f é descontínua no ponto a. E caso ela se cumpra para todos os pontos do domínio da f então dizemos, simplesmente, que f é contínua.

O exemplo mais simples de função contínua que conhecemos é a função constante e isso continua sendo verdade neste contexto.

Exemplo 2.2. Fixado $c \in N$, a aplicação $f : M \longrightarrow N$ dada por $f(x) = c$ é contínua.

De fato, dados $x \in M$ e V_c um vizinhança qualquer de $f(x) = c$ temos $f(M) = \{c\} \subset V_c$. Ou seja, o próprio espaço métrico serve de vizinhança de x cuja imagem está contida na vizinhança arbitrária V_c considerada. Na verdade, qualquer aberto contendo x também serviria para mostrar que a condição exigida para se ter continuidade no ponto x é válida.

Como x é arbitrário, f é contínua em todos os pontos do seu domínio e portanto é contínua.

No próximo exemplo veremos claramente que a continuidade em um ponto depende exclusivamente do espaço métrico em que ele está inserido.

Exemplo 2.3. Seja $a \in M$ um ponto isolado. Qualquer aplicação $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto a.

A fim de verificarmos pela definição a continuidade de f em a devemos considerar $V_{f(a)}$ um vizinhança qualquer de $f(a)$. Sendo a um ponto isolado existe $r > 0$ de tal maneira que $B_M(a, r) = \{a\}$. Como toda bola é um aberto de um espaço métrico, $B_M(a, r)$ é uma vizinhança de a e satisfaz

$$f(B_M(a, r)) = f(\{a\}) \subset V_{f(a)}.$$

Garantindo assim a continuidade de f no ponto a.

Observação 2.4. O exemplo anterior nos garante que se M é um espaço métrico discreto, então $f : M \longrightarrow N$ é contínua.

O exemplo seguinte mostra que a função característica dos racionais na reta é descontínua em todos os pontos.

Exemplo 2.5. Considere $\mathbb{R}$ munido da métrica usual. A função $\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

é descontínua em todos os pontos.

Dado $x \in \mathbb{R}$ analisaremos separadamente os casos $x \in \mathbb{Q}$ e $x \notin \mathbb{Q}$, apesar de serem análogos.

Se o primeiro ocorrer, então $\chi(x) = 1$. A vizinhança $B(1, 1/2) = (1/2, 3/2)$ de $\chi(x)$ não contém qualquer imagem por χ de aberto contendo x. Pois todo aberto A_x contendo x contém um irracional, digamos y. Assim, $\chi(y) \in \chi(A_x)$ mas $\chi(y) = 0 \notin (1/2, 3/2)$.

Agora se $x \notin \mathbb{Q}$, $\chi(x) = 0$ e a vizinhança $B(0, 1/2) = (-1/2, 1/2)$ de $\chi(x)$ não contém qualquer imagem por χ de aberto contendo x. De fato, todo aberto A_x contendo x contém um racional, digamos y, e $\chi(y) \in \chi(A_x)$ mas $\chi(y) = 1 \notin (-1/2, 1/2)$.

A noção de continuidade em um ponto dada na Definição 2.1 tem duas equivalências familiares em contextos mais específicos.

Proposição 2.6. *Seja $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação entre os espaços métricos (M, d_M) e (N, d_N). A aplicação f ser contínua em um ponto $a \in M$ é equivalente a cada uma das seguintes afirmações:*

i) dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_M(x, a) < \delta$ implica $d_N(f(x), f(a)) < \epsilon$;

ii) toda sequência $\{x_n\}_n$ em M tal que $x_n \to a$ implica $f(x_n) \to f(a)$.

Demonstração. Primeiramente mostremos a equivalência a i). Suponha f contínua no ponto a. Dado $\epsilon > 0$, $B_N(f(a), \epsilon)$ é uma vizinhança de $f(a)$. Assim existe uma vizinhaça V_a de a em M tal que $f(V_a) \subset B_N(f(a), \epsilon)$. Como V_a é um aberto contendo a, existe $\delta > 0$ tal que $B_M(a, \delta) \subset V_a$. Desta maneira, $f(B_M(a, \delta)) \subset B_N(f(a), \epsilon)$, ou seja, $d_M(x, a) < \delta$ implica $d_N(f(x), f(a)) < \epsilon$ e i) é verdadeira.

Reciprocamente, dada um vizinhança $V_{f(a)}$ de $f(a)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_N(f(a), \epsilon) \subset V_{f(a)}$. Sendo i) verdadeira, existe $\delta > 0$ tal que $d_M(x, a) < \delta$ implica $d_N(f(x), f(a)) < \epsilon$. Isto significa que $B_M(a, \delta)$ é uma vizinhança de a tal que $f(B_M(a, \delta)) \subset V_{f(a)}$. Logo f é contínua no ponto a.

Agora a fim de verificarmos que ii) é equivalente a definição de continuidade no ponto a mostraremos, na verdade, que é equivalente a i).

terminar

Exemplo 2.7. Toda imersão isométrica é uma aplicação contínua. Em particular a aplicação β, definida na demonstração do Teorema 1.25, é contínua.

Seja $f : M \longrightarrow N$ uma imersão isométrica. Isto significa que f preserva distância e assim dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$, claramente, $d_M(x, y) < \delta$ implica $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y) < \epsilon$. Isto significa que f é contínua em todos os pontos do domínio e, portanto, é contínua.

As imersões isométricas formam uma classe de aplicações dentro de uma classe mais ampla definida a seguir.

Definição 2.8. *Uma aplicação $f : M \to N$ é uma contração fraca se*

$$d_N(f(x), f(y)) \leq d_M(x, y), \quad x, y \in M.$$

As contrações fracas são contínuas e a justificativa para o fato é análoga a do exemplo anterior.

Exemplo 2.9. A projeção na primeira coordenada do produto cartesiano de espaços métricos é uma contração fraca. Logo, $\pi_1 : M \times N \longrightarrow M$ dada por $\pi_1(x, y) = x$, $(x, y) \in M \times N$, é contínua.

De fato, se considerarmos qualquer umas das três métricas δ_i, $i = 1, 2, 3$ (Exemplo 1.3) no produto cartesiano $M \times N$, temos

$$d_M(\pi_1(x_1, y_1), \pi_1(x_2, y_2)) = d_M(x_1, x_2) \leq \delta_i(\pi_1(x_1, y_1), \pi_1(x_2, y_2)),$$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M \times N$ e $i = 1, 2, 3$.

Exemplo 2.10. A norma $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$, onde V é um espaço vetorial normado, é uma contração fraca e, portanto, contínua.

A afirmação segue da seguinte observação. Dados $u, v \in V$ temos

$$|\|u\| - \|v\|| = |d(u, 0) - d(0, v)| \leq d(u, v),$$

onde d é a distância induzida pela norma.

A continuidade de uma função em todos os pontos do sei domínio pode ser verificada por meio dos abertos dos espaços métricos envolvidos da seguinte maneira.

Proposição 2.11. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Uma função $f : M \longrightarrow N$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(A)$ é aberto em M para todo aberto A de N.*

Demonstração. Consideremos f é contínua e $A \subset N$ um aberto. Se $f^{-1}(A) = \emptyset$, então não há o que se provar. Caso contrário, dado $a \in f^{-1}(A)$ temos $f(a) \in A$. Como A é aberto existe $\epsilon > 0$ de tal maneira que $B_N(f(a), \epsilon) \subset A$. Agora, da continuidade de f no ponto a, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_M(a, \delta)) \subset B_N(f(a), \epsilon) \subset A,$$

implicando

$$B_M(a, \delta) \subset f^{-1}A,$$

e, portanto, $f^{-1}(A)$ é aberto.

Reciprocamente, terminar ■

Também, a verificação da continuidade de uma função pode se dar por meio dos fechados, simplesmente observando que $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ para $A \subset N$.

Corolário 2.12. *Uma função $f : M \longrightarrow N$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(F)$ é fechado em M para todo fechado F de N.*

Proposição 2.13. *Sejam (M, d_M), (N, d_N) e (P, d_P) espaços métricos. Se $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow P$ são contínuas, então a composição $g \circ f : M \longrightarrow P$ é contínua.*

Demonstração. Via a proposição anterior, basta verificarmos que $(g \circ f)^{-1}(A)$ é aberto em M, sempre que $A \subset N$ é aberto.

De fato, se A é um aberto de P, então $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ é aberto em M. Isto se deve ao fato que $g^{-1}(A)$ é aberto em N (devido a continuidade de g) e, consequentemente, $f^{-1}(g^{-1}(A))$ é aberto em M (devido a continuidade de f). ■

Quando consideramos uma função $f : M \longrightarrow N$ e $A \subset M$ a restrição da função f à A é dada pela composição $f \circ i : A \longrightarrow N$, onde $i : A \longrightarrow M$ é a inclusão. Como i é, claramente, contínua temos o seguinte resultado.

Corolário 2.14. *A restrição de uma função contínua é contínua.*

Além da composição de funções podemos considerar outra construção como a seguir.

Proposição 2.15. *Sejam* $f : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ *e* $g : (M, d_M) \longrightarrow (P, d_P)$ *funções. A aplicação* $(f, g) : M \longrightarrow N \times P$ *definida por* $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ *é contínua se, e somente se,* f *e* g *são contínuas.*

Demonstração. Escrever ■

Na proposição anterior as funções f e g são chamadas funções coordenadas de (f, g). Como consequência deste resultado temos o seguinte.

Corolário 2.16. *Se* $f_1 : M_1 \longrightarrow N_1$ *e* $f_2 : M_2 \longrightarrow N_2$ *são funções contínuas, então é contínua* $f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow N_1 \times N_2$ *definida por* $(f_1 \times f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x))$.

Demonstração. Escrever ■

Exemplo 2.17. Se f, $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, então

$$A := \{x \in M : f(x) \neq g(x)\},$$

é aberto em M

Escrever

Exemplo 2.18. Seja (M, d_M) um espaço métrico. A diagonal Δ em $M \times M$ dada por

$$\Delta := \{(x, y) \in M \times M : d(x, y) = 0\},$$

é um subconjunto fechado em $M \times M$.

Escrever

2.1 Funções Lipschitzianas

A classe das funções lipschitzianas é uma classe que pode ser considerada ampla de funções contínuas e contempla a classa das contrações fracas como veremos nesta seção.

Definição 2.19. *Uma função* $: (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ *é lipschitziana se existe* $k > 0$ *tal que*

$$d_N(f(x), f(y)) \leq k\, d_M(x, y), \quad x, y \in M.$$

Neste caso, k é chamada constante de Lipschitz.

Se a função f satisfaz esta propriedade localmente, ou seja, se para cada $a \in M$ existir $r > 0$ tal que $f|_{B_M(a,r)}$ é lipschitziana, então diremos que f é localmente lipschitziana.

Observe que toda função lipschitziana é localmente lipschitziana. Assim, para garantir a continuidade das funções lipschitzianas garantiremos a continuidade das que localmente têm essa propriedade.

Observação 2.20. Toda função localmente lipschitziana é contínua.

Faremos isso mostrando a continuidade da função em cada um dos pontos do seu domínio. Assim dado $a \in M$, seja $r > 0$ tal que $f|_{B_M(a,r)}$ é lipschitziana, digamos com constante lipschitz k. Dado $\epsilon > 0$ tomamos $\delta = \min\{r, \epsilon/r\}$ e, então, $d_M(a,x) < \delta$ implica $d_N(f(a), f(x)) \leq k\, d_M(a,x) < \epsilon$.

Proposição 2.21. *Sejam (M,d) e $(E, \|\cdot\|)$ um espaço métrico e um espaço vetorial normado, respectivamente. Considere $\alpha, \beta : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f, g : M \longrightarrow E$ contínuas com $\beta(x) \neq 0$, $x \in M$. São contínuas as seguintes aplicações:*

i) $f + g : M \longrightarrow E$, definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in M$;

ii) $\alpha f : M \longrightarrow E$, definida por $(\alpha f)(x) = \alpha(x) f(x)$, $x \in M$;

iii) $\alpha/\beta : M \longrightarrow E$, definida por $(\alpha/\beta)(x) = \alpha(x)/\beta(x)$, $x \in M$;

vi) $m : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$, definida por $m(\lambda, v) = \lambda v$, $x \in M$. (Multiplicação por escalar)

Demonstração. Primeiramente mostremos que as seguintes aplicações são contínuas:

a) $r : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $r(x) = 1/x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

b) $s : E \times E \longrightarrow E$ dada por $s(v,w) = v + w$, $v, w \in E$.

Mostrado isso e o item iv), os itens os remanescentes serão consequeências, como veremos.

De fato, dado $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe k um número real positivo tal que $k < |a|$. Tomemos $\gamma = (|a| - k)/2$ e verifiquemos que r é lipschitziana em $B_{\mathbb{R}}(a, \gamma)$, i.e, localmente lipschitziana. Se $x, y \in B_{\mathbb{R}}(a, \gamma)$, então $|x|, |y| > k$ e

$$|r(x) - r(y)| = |1/x - 1/y| = \frac{|x-y|}{|x||y|} \leq \frac{|x-y|}{k^2}.$$

Assim, fica provado a). Para o item b), consideremos $E \times E$ com a métrica da soma, denotada aqui por $d_{E \times E}$. Dados $u, v, w, z \in E$ temos, pela desigualdade triangular,

$$\|s(u,v) - s(w,z)\| \leq \|u - w\| + \|v - z\| = d_{E \times E}((u,v),(w,z)).$$

O que nos garante a continuidade de s, uma vez que verificamos que esta aplicação é uma contração fraca.

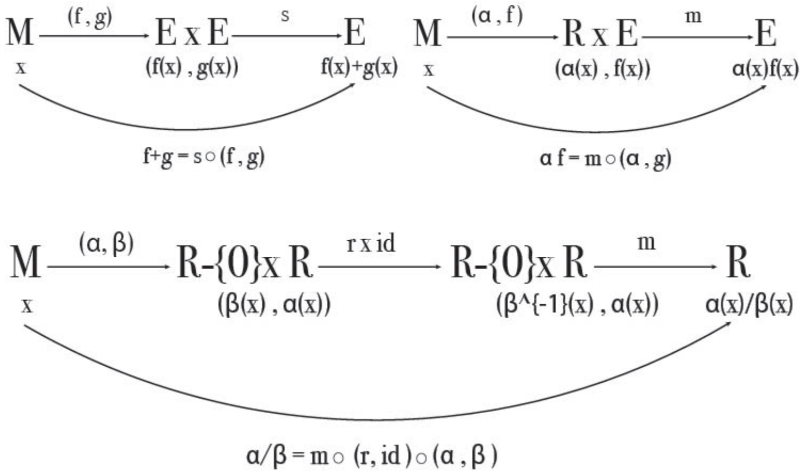
Agora, mostremos que a multiplicação por escalar, item iv), é contínua verificando que ela é lipschitziana em cada limitado de $\mathbb{R} \times E$ e, consequentemente, localmente lipschitziana. Portanto, contínua. Para isto consideremos em $\mathbb{R} \times E$ a métrica do máximo, denotada aqui por $d_{\mathbb{R} \times E}$, e $a > 0$. Dados $(\lambda, x), (\mu, y) \in B_{\mathbb{R} \times E}((0,0), a)$, temos $|\lambda|, |\mu|, \|x\|, \|y\| < a$ e

$$\begin{aligned} \|m(\lambda, x) - m(\mu, y)\| = \|\lambda x - \mu y\| &\leq \|x\||\lambda - \mu| + |\mu|\|x - y\| \\ &< a|\lambda - \mu| + a\|x - y\| \\ &\leq 2a \max\{|\lambda - \mu|, \|x - y\|\} \\ &\leq 2a\ d_{\mathbb{R} \times E}((\lambda, x), (\mu, y)). \end{aligned}$$

Finalmente, as observações anteriores e a Proposição 2.15 garantem a continuidade das aplicações dos itens i), ii) e iii) já que

$$f + g = s \circ (f, g), \quad \alpha f = m \circ (\alpha, f) \quad \text{e} \quad \alpha/\beta = m \circ (r, id) \circ (\alpha, \beta),$$

onde id representa a função identidade da reta na reta.



■

Observe que na demonstração da proposição anterior fizemos uso da métrica que nos foi mais conveniente, hora a da soma hora a do máximo. A continuidade de uma função independe da escolha da métrica desde que elas sejam equivalentes (Definição 1.46). Este é o conteúdo do próximo resultado.

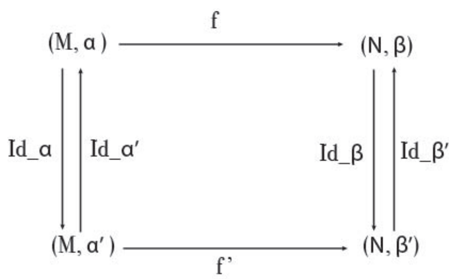
Proposição 2.22. *Sejam M um conjunto não vazio, d_1 e d_2 duas métricas em M. As métricas d_1 e d_2 são equivalentes se, e somente se, as identidades $Id_1 : (M, d_1) \longrightarrow (M, d_2)$ e $Id_2 : (M, d_2) \longrightarrow (M, d_1)$ são contínuas.*

Demonstração. Escrevamos B_1 e B_2 para denotar as bolas segundo as métricas d_1 e d_2, respectivamente.

As métricas d_1 e d_2 são equivalentes se, e somente se, dado $x \in M$ e $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $Id_1(B_1(x, \delta_1)) = B_1(x, \delta_1) \subset B_2(x, \epsilon)$ e $Id_2(B_2(x, \delta_2)) = B_2(x, \delta_2) \subset B_1(x, \epsilon)$. A última proposição é equivalente a $Id_1 : (M, d_1) \longrightarrow (M, d_2)$ e $Id_2 : (M, d_2) \longrightarrow (M, d_1)$ serem contínuas.
■

Corolário 2.23. *Sejam α e α' métricas equivalentes em M e β e β' métricas equivalentes em N. Uma função $f : (M, \alpha) \longrightarrow (N, \beta)$ é contínua se, e somente se, $f' : (M, \alpha') \longrightarrow (N, \beta')$ é contínua.*

Demonstração. Segundo o diagrama abaixo



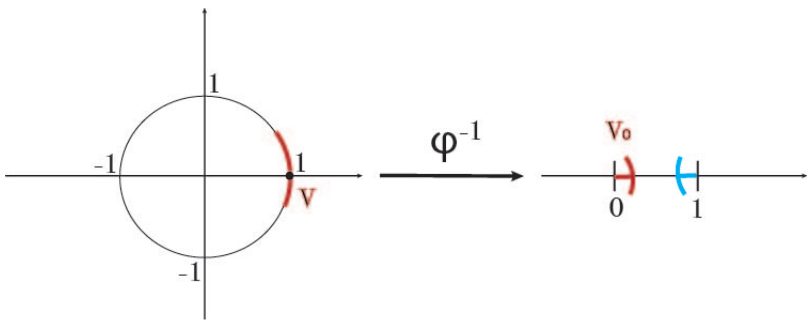
podemos escrever $f' = Id_\beta \circ f \circ Id_{\alpha'}$ e $f = Id_{\beta'} \circ f' \circ Id_\alpha$. De onde segue a demonstração. ■

2.2 Homeomorfismos

A continuidade de uma aplicação de um espaço métrico em outro nos permite concluir algo a respeito do contradomínio provenientes de informações sabidas a respeito do seu domínio. Contudo, para o que propõe-se estudar aqui, invariantes topológicos, a continuidade não é suficiente. Por isso introduzimos os homeomorfismos, aplicações contínuas e invertíveis cuja inversa também é contínua. Afinal, a inversa de uma aplicação contínua, quando existe, nem sempre é contínua.

Exemplo 2.24. Seja $\varphi : [0,1) \longrightarrow S^1$[1] dada por $\varphi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $t \in [0,1)$. Em ambos, $[0,1)$ e S^1 consideramos as métricas induzidas pelo espaço ondem moram.

Claramente, φ é contínua (suas funções coordenadas o são) e bijetora. Porém, dada uma vizinhaça V_0 de $0 = \varphi^{-1}((1,0))$ tal que $V_0 \cap [0,1/3) = V_0$ é fácil mostrar que toda vizinhança V do ponto $(1,0)$ é tal que sua imagem, por φ^{-1}, não está contida em V_0. Veja a representação gráfica abaixo.



Definição 2.25. *Uma aplicação $f : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ é um homeomorfismo se é contínua, bijetora e sua inversa f^{-1} é contínua. Se existe um homeomorfismo entre M e N então diremos que M é homeomorfo a N e escreveremos $M \approx N$.*

Exemplo 2.26. $(-1,1) \approx \mathbb{R}$. De fato, defina $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ e sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ por

$$f(t) = \frac{1}{1-|t|}, \quad t \in (-1,1) \quad \text{e} \quad f^{-1}(t) = \frac{t}{1+|t|}, \quad t \in \mathbb{R},$$

respectivamente. Claramente, f e f^{-1} são contínuas.

Proposição 2.27. *A composição de homeomorfismos é um homeomorfismo.*

[1] S^1 representa o cículo de $\mathbb{R}^2$ centrado na origem e da raio 1.

A demosntração do resultado anterior segue diretamente dos resultados da subseção anterior. Uma consequência imediata desta proposição é o seguinte.

Corolário 2.28. *Se $M \approx N$ e $M \approx P$, então $M \approx P$.*

Exemplo 2.29. Observe que o Exemplo 2.26 pode ser reproduzido se trocarmos a reta por $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e o intervalo aberto pela bola $B(0,1)$ de E. Desta maneira, $E \approx B(0,1)$.

Além disso, não é difícil mostrar que dado $v \in E$ e $r > 0$, $B(0,1) \approx B(v,r)$. Logo, $E \approx B(v,r)$. Em particular, todo intervalo aberto da reta (a,b) é tal que $(a,b) \approx \mathbb{R}$.

Exemplo 2.30. Se $M \approx N$ e M é discreto, então N o é.

Proposição 2.31. *Uma bijeção $f : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ é um homeomorfismo se, e somente se, d_M é a métrica induzida por f.*

Demonstração. Suponhamos que f é um homeomorfismo e denotemos por d_i a métrica induzida por f, ou seja, $d_i(x,y) = d_N(f(x), f(y))$, $x, y \in M$. Desta maneira, pela Proposição 2.22, basta verificarmos que $Id_M : (M, d_M) \longrightarrow (M, d_i)$ e $Id_i : (M, d_i) \longrightarrow (M, d_M)$ são contínuas. Observe que

$$Id_M = g \circ f \quad \text{e} \quad Id_i = f^{-1} \circ g^{-1},$$

onde $g : (N, d_N) \longrightarrow (M, d_i)$ é dada por $g(z) = f^{-1}(z)$, $z \in N$. Adicionalmente, temos

$$d_i(x,y) = d_i(f(f^{-1})(x)), f(f^{-1}(y))) = d_N(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d_N(g(x), g(y)), \quad x, y \in M,$$

e

$$d_N(g^{-1}(z), g^{-1}(w)) = d_N(f(z), f(w)) = d_i(z,w), \quad z, w \in M,$$

de onde segue que g e $g{-}1$ são isometrias, respectivamente, e portanto contínuas.

A recíproca é análoga. ■

As bijeções contínuas também pode ser caracterizadas via o seguinte conceito.

Definição 2.32. *Uma aplicação $f : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ á aberta se $f(A)$ á aberto em N para todo aberto A de M. A aplicação á fechada se $f(F)$ á fechado em N para todo fechado F de M.*

Antes de apresentarmos a caracterização vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.33. Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. A projeção $\Pi_1 : M \times N \longrightarrow M$, $\Pi_1(x,y) = x$, $(x,y) \in M \times N$, á uma aplicação aberta e fechada.

De fato, sejam $A \subset M \times N$ um aberto e $x \in \Pi_1(A)$. Existem $(x,y) \in A$ e $r > 0$ tais que $\Pi_1((x,y)) = x$ e $B_{M\times N}((x,y), r) \subset A$ (pois A é aberto). Considerando em $M \times N$ a métrica do máximo temos

$$B_{M\times N}((x,y), r) = B_M(x,r) \times B_N(y,r) \subset A,$$

e portanto, $B_M(x,r) \subset \Pi_1(A)$ e Π_1 é aberta.

Agora, para verificarmos que Π_1 é fechada tomemos $F \subset M \times N$ um fechado e observemos que $M \times N \setminus F$ é aberto e portanto

$$\Pi_1(M \times N \setminus F) = M \setminus \Pi_1(F),$$

é aberto. De onde segue que $\Pi_1(F)$ é fechado.

Exemplo 2.34. Analogamente ao exemplo anterior se (M, d_M) e (N, d_N) são espaços métricos, então a projeção $\Pi_2 : M \times N \longrightarrow N$, $\Pi_2(x, y) = y$, $(x, y) \in M \times N$, á uma aplicação aberta e fechada.

Exemplo 2.35. Retornando ao Exemplo 2.24, observe que $[0, 1/2)$ é aberto em $[0, 1)$, contudo $\varphi([0, 1/2))$ não é aberto em S^1. Analogamento para verificar que, também não é fechada.

Finalizamos esta seção caracterizando os homeomorfismos em termos de aplicações abertas e/ou fechadas. Uma vez que a demonstração é simples, fica a cargo do interessado em demonstra-la.

Proposição 2.36. *Seja $f : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ contínua e bijetora. Então, f é um homeomorfismo se, e somente se, é uma aplicação aberta (fechada).*

2.3 Exercícios

1. Mostre que a inclusão é uma função contínua.

2. Mostre que a definição de função lipschitziana não é equivalente à de localmente lipschitziana.

3. Sejam d_1 e d_2 duas métricas em M. Mostre que se existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y), \quad x, y \in M,$$

então d_1 e d_2 são equivaelntes.

3 Espaços Métricos Completos

Como veremos os espaços métricos completos reproduzem uma propriedade muito importante encontrada na reta, a de sequências suficientemente boas (de Cauchy) serem convergentes. Além disso, todo espaço métrico, mesmo que não possua esta propriedade pode ser "completado"de maneira tal a exibi-la. Justamente por isso, trabalhar propriedades associadas a estes espaços se faz coerente.

Para formalizarmos este conceito definamos o seguinte.

Definição 3.1. *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência $\{a_n\}_n$ de M é de Cauchy se dado $\epsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n \geq n_0 \quad \textit{implica} \quad d(a_n, a_m) < \epsilon.$$

Não é complicado mostrar que sequência congentes são de Cauchy e a recíproca não é verdadeira (exemplo a seguir).

Exemplo 3.2. Considere $(0, 1)$ com a métrica induzida de $\mathbb{R}$. A sequência $\{1/n\}_n$, $n \geq 1$, não converge em $(0, 1)$ apesar de ser uma seqeência de Cauchy.

Formalizemos o conceito de completude.

Definição 3.3. *Um espaço métrico (M, d) é completo se toda sequência de Cauchy de M converge em M.*

Exemplo 3.4. Vejamos alguns exemplos de espaqs métricos completos e não completos.

1) O intervalo $(0, 1)$ com a métrica induzida de $\mathbb{R}$ não é completo.

2) O conjuntos nos números racionais $\mathbb{Q}$ com a métrica induzida de $\mathbb{R}$ não é completo.

3) A reta $\mathbb{R}$ é completa.

O item 1) segue do Exemplo 3.2. De maneira análoga segue 2), já que é simples considerar uma sequência de números acionais que convirja para um número irracional, esta será de Cauchy porém não convergente em $\mathbb{Q}$.

Finalmente, o item 3) é uma consequência do Teorema de Bolzano-Weierstass que diz: *Toda sequência limitada de números reais possui possui uma subsequência convergente.* [2]. Como toda seqência de Cauchy é limitada (exercício!) ela possui uma subsequência convergente e seu limite é o limite da sequência original.

Vejamos algumas propriedades.

Proposição 3.5. *Um subespaço métrico completo de um espaço métrico é fechado. E todo subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo.*

[2] Consequência do seguinte fato: toda sequência possui uma subsequência monótona

Demonstração. A fim de mostrarmos a primeira afirmação para dado F um subespaço métrico completo, mostraremos que $\overline{F} = F$. De fato, se $a \in \overline{F}$ seja $\{a_n\}$ uma sequência de elementos de F a qual converge para a. Como F é completo esta sequência (que em particular é de Cauchy) converge em F. Logo, $a \in F$.

A segunda afirmação segue do seguinte: seja $\{a_n\}$ uma sequência de Cauchy elementos de F. Se F é fechado, então o limite de $\{a_n\}$ (o qual existe já que o espaço métrico é completo) é um elemento de $\overline{F} = F$. Donde segue que F é completo. ■

A completude de um subespaço não é preservada sob a ação, apenas, de uma função contínua. Por isso trabalharemos com um conceito mais forte.

Definição 3.6. *Dizemos que* $f : (M, d) \longrightarrow (N, d_N)$ *é uniformemente contínua se dado* $\epsilon > 0$*, existir* $\delta > 0$ *tal que:* $d_M(x, y) < \delta$ *implica* $d_N(f(x), f(y)) < \epsilon$*. Adicionalmente, um homeomorfismo uniforme é um homeomorfismo uniformemente contínuo cuja inversa também é uniformemente contínua.*

Exemplos de tais funções já apareceram: contrações fracas e imersões isométricas são uniformemente contínuas.

Proposição 3.7. *Toda função uniformemente contínua transforma sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.*

Demonstração. De fato, seja $\{a_n\}$ uma sequência de Cauchy de M. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que $d_M(x, y) < \delta$ implica $d_N(f(x), f(y)) < \epsilon$. Como $\{a_n\}$ uma sequência de Cauchy existe n_0 tal que $m, n \geq n_0$ implica $d_M(a_n, a_m) < \delta$ e portanto, $d_N(f(a_n), f(a_m)) < \epsilon$. ■

A proposição acima implica que se f for um homeomorfismo uniforme, então $\{a_n\}$ é de Cauchy em M se, e somente se, $\{f(a_n)\}$ é de Cauchy em N. De onde segue o seguinte.

Corolário 3.8. *Seja* $f : (M, d) \longrightarrow (N, d_N)$ *um homeomorfismo uniforme. O espaço* M *é completo se, e somente se,* N *o é.*

Proposição 3.9. *O produto cartesiano de dois espaços métricos é completo se, e somente se, cada componente é completa.*

Demonstração. Por um lado observemos que se $M \times N$ é completo, então M e N também são: uma consequência direta da continudade uniforme de ambas projeções $\pi_1 : M \times N \longrightarrow M$ e $\pi_2 : M \times N \longrightarrow N$.

Reciprocamente, se $\{(a_n, b_n)\}$ é uma sequência de Cauchy em $M \times N$ é fácil ver que $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são de Cauchy em M e N, respectivamente. Se considerarmos a distância da soma em $M \times N$, então é claro que $\{(a_n, b_n)\}$ converge uma vez que $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergem em M e N, respectivamente. ■

Corolário 3.10. *O espaço euclidiano* n *- dimensional é completo.*

Todo espaço métrico pode ser completado de maneira única adicionando-lhe novos pontos. Para mostrarmos esta afirmação formalizemos alguns conceitos.

Definição 3.11. *Um completamento de um espaço métrico* (M, d) *é um par* $(\hat{M}, \varphi)$ *onde* $\hat{M}$ *é completo e* $\varphi : M \longrightarrow \hat{M}$ *é uma imersão isométrica tal que* $\overline{\varphi(M)} = \hat{M}$*, ou seja,* $\varphi(M)$ *é denso em* $\hat{M}$*. Neste caso, escrevemos* $M \hookrightarrow \hat{M}$*.*

Exemplo 3.12. Vejamos alguns exemplos.

1) O intervalo $[0,1]$ é completamento de $(0,1)$. De fato, a inclusão i de $(0,1)$ em $[0,1]$ é uma imersão isométrica tal que $\overline{i((0,1))} = [0,1]$.

2) Mais geralmente, todo subconjunto C de um espaço métrico completo (M,d) tem por completamento seu fecho, $\overline{C}$.

3) $\mathbb{R}$ é o completamento de $\mathbb{Q}$.

3.1 O completamento de um espaço métrico

Nesta seção mostraremos o teorema de existência (de duas formas diferentes) e unicidade do completamento de um espaço métrico. Comecemos com a unicidade.

Proposição 3.13. *Seja (M,d) um espaço métrico. Se $(\overline{\varphi_1(M)}, \varphi_1)$ e $(\overline{\varphi_2(M)}, \varphi_2)$ são dois completamentos de M, então eles são isométricos.*

Demonstração. Definamos $\varphi : \overline{\varphi_2(M)} \longrightarrow \overline{\varphi_1(M)}$ da seguinte maneira $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_1(x_n)$, onde $\{x_n\}$ é uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi_2(x_n) = x$, para dado $x \in \overline{\varphi_2(M)}$.

Sejam $x, y \in \overline{\varphi_2(M)}$ e $\{x_n\}, \{y_n\}$ sequências em M tais que $\lim_{n\to\infty} \varphi_2(x_n) = x$ e $\lim_{n\to\infty} \varphi_2(y_n) = y$. Se denotarmos por (M_1, d_1) e (M_2, d_2) os completamentos $(\overline{\varphi_1(M)}, \varphi_1)$ e $(\overline{\varphi_2(M)}, \varphi_2)$, respectivamente, temos

$$d_2(x,y) = \lim_{n\to\infty} d_2(\varphi_2(x_n), \varphi_2(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d_1(\varphi_1(x_n), \varphi_1(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d_1(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Se $\varphi(x) = \varphi(y)$, então que $x = y$, logo φ está bem definida. Mais que isso ela também garante que φ é uma isometria, portanto contínua e injetora. Não é difícil ver que φ é sobrejetora. ■

Teorema 3.14. *Todo espaço métrico possui um único (a menos de isometrias) completamento.*

Demonstração. A unicidade foi demonstrada acima. Assim nos restringiremos aqui a garantir a existência do completamento $(\overline{M}, d')$ para um dado espaço métrico (M,d). Serão apresentadas duas provas.

Prova 1. Para a primeira prova, relembremos do Teorema 1.25: existe uma imersão isométrica de um dado espaço métrico (M,d) em $B(M,\mathbb{R})$. Desta forma, tal imersão é uma isometria sobre sua imagem e seja $\overline{M}$ o fecho de sua imagem. Mostremos que assim fica determinado o completamento de M. Logo só nos resta garantir que $\overline{M}$ é completo.

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $B(M,\mathbb{R})$. Primeiramente, sabemos que $\{f_n\}$ é limitada em $B(M,\mathbb{R})$ e seja c um limitante superior. Além disso, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $n, m \geq n_0$ implica

$$d(f_n, f_m) = \|f_n - f_m\| = \sup_{x\in M} \{|f_n(x) - f_m(x)|\} < \epsilon/2.$$

Isto significa que para cada $x \in M$ a sequência $\{f_n(x)\}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e portanto convergente. Definimos $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ para cada $x \in M$ como o limite da sequência $\{f_n(x)\}$. Não é difícil ver que f é limitada e então está em $B(M,\mathbb{R})$ e $f_n \to f$ uniformemente de onde segue que a convergência se dá em $B(M,\mathbb{R})$.

Prova 2. A segunda prova, apesar de mais longa, é mais elementar no sentido de fazer uso de poucos resultados anteriores. Definiremos o espaço candidato a completamento, juntamente com sua métrica e garantiremos a existência de uma imersão de M em sua imagem, cujo fecho é completo.

Definimos o seguinte

$$S(M) := \{\{x_n\} \text{ sequência em } M\colon \{x_n\} \text{ é de Cauchy}\},$$

e a seguinte relação

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \text{ se, e somente se, } d(x_n, y_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Não é difícil ver que a relação acima é de equivalência. Desta maneira, consideremos $\overline{M} := S(M)/M$ e definimos

$$d'(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n), \quad \overline{x} := [\{x_n\}], \overline{y} := [\{y_n\}] \in \overline{M}.$$

Verifiquemos que a definição de d' independe da escolha de classes, ou seja, $d' : \overline{M} \times \overline{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ está bem definida. Para tanto sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas sequência de Cauchy em M, a desigualdade triangular implica

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| &\leq |d(x_n, y_n) - d(y_n, x_m)| + |d(y_n, x_m) - d(x_m, y_m)| \\ &\leq |d(x_n, x_m)| + |d(y_n, y_m)|. \end{aligned}$$

A desigualdade anterior nos garante que a sequência $\{d(x_n, y_n)\}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Portanto, convergente. Com esta informação em mente se considerarmos $\overline{x} = [\{x_n\}], \overline{y} = [\{y_n\}], \overline{x}' = [\{x'_n\}], \overline{y}' = [\{y'_n\}] \in \overline{M}$ tais que $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ e $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ (isto é equivalente a dizer que $\overline{x} = \overline{x}'$ e $\overline{y} = \overline{y}'$), então

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0 = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n).$$

Agora, observe que

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(x'_n, y'_n)$$

■.

3.2 Aplicação à equações

3.3 Exercícios

1. Mostre que é verdadeira “A completude de um subespaço não é preservada sob a ação, apenas, de uma função contínua”.

4 Espaços Métricos Conexos

4.1 Classificacação dos conexos de $\mathbb{R}$

4.2 Aplicação: o Teorema de Borsuk-Ulam

4.3 Espaços Métricos Conexos por caminhos (cpc)

4.4 Exercícios

5 Espaços Métricos Compactos

5.1 Exercícios