Introdução a Teoria da Medida

2017

Thaís Jordão
Colaboração: Cláudia Rodrigues da Silveira
USP - São Carlos

Sumário

1 A integral de Lebesgue: introdução

Qual a impotância de estudar este conceito de integração?

A principal diferença entre as integrais de Riemann (que você já conhece) e a integral de Lebesgue é que a noção de integração desta última leva em consideração os valores que uma função assume subdividindo sua imagem ao invés de subdividir seu domínio, como fazemos na integração de Riemann. Esta diferença é fundamental para conseguirmos, por exemplo, integrar funções que oscilam demais ou apresentam muitas descontinuidades.

Existem muitas funções que não são Riemann integráveis mas que são integráveis no sentido de Lebesgue. E mais, veremos que "quase toda"função (talvez todas que tenha integrado até hoje!) Riemann integrável é Lebesgue integrável.

Para te deixar mais convencido de que precisamos redefinir nosso conceito de integração observe o seguinte exemplo de uma função do "tipo-Dirichlet". Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é racional;} \\ 1, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Esta função não é Riemann integrável. De fato, se considerarmos qualquer partição de $[0,1]$, o supremo de f em qualquer subdivisão da partição será 1, enquanto que o ínfimo será 0. Desta maneira, a soma de Riemann superior é 1 e a inferior 0. Logo, a integral de Riemann não existe.

Por outro lado f é Lebesgue integrável, como veremos. Gostaríamos que esta integral sugerisse a área sobre o gráfico da função. Intuitivamente, sabemos que existem muito, mas muito, mais números irracionais do que racionais. Assim, olhando para o gráfico de f nos basta calcular a área de um quadrado cujo lado mede 1. Afinal, o subconjunto do domínio onde a função vale zero é muito pequeno (formalmente, tem medida nula!).

Desta maneira fica clara a necessidade de redefinição do nosso conceito de integral. Neste caso, como definir uma integração mais poderosa? Por volta de 1900, Henri Lebesgue (um francês) propôs (na verdade, surgiu com a magnífica ideia) subdividir a imagem de um função e não seu domínio.

Assim, a integral anterior, levando em conta a função só possui os pontos 0 e 1 em sua imagem, deve ser

$$\int_0^1 f(x)\ dm = 0 \cdot m(A_0) + 1 \cdot m(A_1),$$

onde $m(A_0)$, $m(A_1)$ representam as "medidas"de A_0 e A_1, respectivamente; $A_0 = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ e $A_1 = [0,1] \setminus A_0$. E, intuitivamente, $m(A_0) = 0$ logo, $m(A_1) = 1$ e $\int_0^1 f(x) dm = 1$.

Mas todas as funções são Lebesgue integráveis, então? Infelizmente, ou felizmente, não! Como veremos, a função $f(x) = 1/x$ (que não é Riemann integrável) não é Lebesgue integrável já que esta integral é infinito.

Além de estendermos a classe de funções que podemos integrar, a integral de Lebesgue unifica os casos contínuo e discreto de variáveis aleatórias. Por exemplo, se X tem uma função f densidade de probabilidade, ou seja, uma função não negativa para representar a distribuição de probabilidade de uma variável contínua, então a esperança de X é

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx.$$

No caso discreto,

$$E(X) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nP(X = n),$$

se $A_n = \{X = n\}$, então $E(X)$ é exatamente a integral de Lebesgue de X com respeito a medida P, o que significa que

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \; dP.$$

Convencidos de que a integral de Lebesgue é mais poderosa, em algum sentido, vamos a ela. Para tanto precisamos desenvolver alguns pré-conceitos: σ-álgebras, funções mensuráveis e medida.

2 σ-Álgebras

Dado um conjunto X não vazio queremos definir uma família de subconjuntos de X que são "bem comportados". Isto significa que esta família é fechada segundo o complemento e uniões enumeráveis.

Definição 2.1. *Uma família $\mathcal{A}_X$ de subconjuntos de X é uma σ-álgebra se*

(i) *se $A \in \mathcal{A}_X$, então $A^c \in \mathcal{A}_X$;*

(ii) *se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{A}_X$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_X$.*

*O par $(X, \mathcal{A}_X)$ é chamado **espaço mensurável** e os elementos da família $\mathcal{A}_X$, **conjuntos mensuráveis**.*

Observe que combinando os itens (i) e (ii) anteriores e a lei de deMorgan, concluímos que σ-álgebras também são fechadas pela interseção enumerável. Mais ainda, se $\mathcal{A}_X$ é σ-álgebra, então $\emptyset \in \mathcal{A}_X$ e $X \in \mathcal{A}_X$, pois se $A \in \mathcal{A}_X$ temos $\emptyset = A \cap A^c$ e $X = A \cup A^c$ são conjuntos mensuráveis. Para nos familiarizarmos a este conceito vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.2. Dado um conjunto X temos que $\mathcal{A}_X^1 = \{\emptyset, X\}$ e $\mathcal{A}_X^2 = P(X)$ (o conjunto das partes de X) são σ-álgebras.

Exemplo 2.3. Seja X um conjunto não enumerável. A família

$$\mathcal{A}_X := \{A \subset X : \ A \text{ é enumerável ou } A^c \text{ é enumerável}\}$$

é uma σ-álgebra, chamada a σ-álgebra dos conjuntos enumeráveis ou coenumeráveis.

De fato, para mostrarmos (i), seja $A \in \mathcal{A}_X$, temos duas opções, A é enumerável ou A^c é enumerável. Se A é enumerável, então $(A^c)^c$ é enumerável, logo $A^c \in \mathcal{A}_X$. Entretanto, caso A^c é enumerável, note que $((A^c)^c)^c$ é enumerável, logo $(A^c)^c \in \mathcal{A}_X$. De qualquer maneira $A^c \in \mathcal{A}_X$.

Já o item (ii), se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{A}_X$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_X$ se A_n é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$, já que neste caso $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ é enumerável. Se A_{n_0} é tal que $A_{n_0}^c$ é enumerável, então $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subset A_{n_0}^c$ é enumerável e portanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_X$.

Exemplo 2.4. Seja$X$ um conjunto qualquer. Existe uma única σ-álgebra (a menor delas), $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ que está contida em qualquer outra que também contiver $\mathcal{E}$, uma família de subconjuntos de X pré-fixada.

De fato, consideremos a seguintes coleção

$$\Sigma_{\mathcal{E}} = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ é } \sigma\text{-álgebra contendo } \mathcal{E}\},$$

que, definitivamente, é não vazia ($P(X) \in \Sigma_{\mathcal{E}}$) e definimos

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \bigcap_{\mathcal{A}\in\Sigma_{\mathcal{A}_{\mathcal{E}}}} \mathcal{A}.$$

Note que $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ é não vazia, pois $\mathcal{E} \in \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$. Se $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ é uma σ-álgebra tal que se $\mathcal{A}'_{\mathcal{E}}$ é outra com a propriedade de conter $\mathcal{E}$ e contida em $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$, claramente, satisfaz $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \mathcal{A}'_{\mathcal{E}}$.

Neste último exemplo a σ-álgebra $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ é chamada σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}$ e nos permite concluir o lema a seguir.

Lema 2.5. *Se $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_X$ então, $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{A}_X$.*

Demonstração. Sabemos que $\mathcal{A}_X$ é uma σ-álgebra que contém $\mathcal{E}$ e $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ é a menor σ-álgebra que contém $\mathcal{E}$, portanto, $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{A}_X$. ■

A próxima definição, σ-álgebra de Borel, será importante nas nossas discussões.

Definição 2.6. *Seja (M, d) um espaço métrico. A σ-álgebra $\mathcal{B}_M$ gerada pela família de abertos de M é chamada **σ-álgebra de Borel** em M. Seus elementos são chamados conjuntos de Borel.*

Em particular, quando $M = \mathbb{R}$ temos a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, gerada por todos os intervalos abertos. Ela pode ser gerada de várias maneiras diferentes:

Proposição 2.7. *A σ-álgebra de Borel da reta $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ é gerada por qualquer um dos seguintes conjuntos:*

(i) *o conjunto dos intervalos abertos: $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) : \ a, \ b \in \mathbb{R} \ e \ \ a < b\}$;*

(ii) *o conjunto dos intervalos fechados: $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] : \ a, \ b \in \mathbb{R} \ e \ \ a < b\}$;*

(iii) *o conjunto dos intervalos semiabertos: $\mathcal{E}_3 = \{(a, b] : \ a < b\}$ ou $\mathcal{E}_4 = \{[a, b) : \ a < b\}$;*

(iv) *o conjunto dos raios abertos: $\mathcal{E}_5 = \{(a, \infty) : \ a \in \mathbb{R}\}$ ou $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty, a) : \ a \in \mathbb{R}\}$;*

(v) *o conjunto dos raios fechados: $\mathcal{E}_7 = \{[a, \infty) : \ a \in \mathbb{R}\}$ ou $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty, a] : \ a \in \mathbb{R}\}$.*

Demonstração. Os elementos de $\mathcal{E}_j$ para $j \neq 3, 4$ são abertos ou fechados; os elementos de $\mathcal{E}_3$ e $\mathcal{E}_4$ são interseções enumeráveis de abertos (por exemplo, $[a, b) = \bigcap_{n \in nat}(a - \frac{1}{n}, b))$. Todos estes conjuntos são conjuntos de Borel, logo pelo Lema 2.5, segue que $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_j} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Por outro lado, todo conjunto aberto em $\mathbb{R}$ é uma união enumerável de intervalos, logo novamente pelo Lema 2.5 temos que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{E}_1}$. Similarmente prova-se que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{E}_j}$ para $j \geq 2$ mostrando que todos os intervalos abertos estão em $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_j}$. Por exemplo, $(a, b) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}}[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}] \in \mathcal{A}_{\mathcal{E}_2}$. ■

A partir da σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$ podemos induzir uma σ-álgebra em $\overline{\mathbb{R}}$ (a reta estendida) que é chamada, convenientemente, de σ-álgebra de Borel estendida.

Exemplo 2.8. Relembramos que a reta estendida $\overline{\mathbb{R}}$ é obtida através da adição à $\mathbb{R}$ de dois elementos (que NÃO são números). Assim, $\overline{\mathbb{R}}$ não é um corpo e é escrito como $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Para cada conjunto de Borel $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, sejam suas seguintes versões estendidas:

$$\overline{E}_1 = E \cup \{-\infty\}; \quad \overline{E}_2 = E \cup \{+\infty\} \quad \text{e} \quad \overline{E}_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Considere

$$\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} = \left\{\overline{E}_i : \ i = 1, 2, 3; \ E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right\} \cup \mathcal{B}_{\mathbb{R}},$$

esta σ-álgebra é chamada *σ-álgebra de Borel estendida.*

Outra forma de construirmos uma σ-álgebra em determinado conjunto é a seguinte.

Exemplo 2.9. Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Definimos

$$\mathcal{A}_X = \{f^{-1}(E) : \ E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\},$$

esta é a σ-álgebra induzida por f. E como consequência direta da definição, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} A_\alpha &\doteq \{x \in X : \ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}_X; \\ B_\alpha &\doteq \{x \in X : \ f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}_X; \\ C_\alpha &\doteq \{x \in X : \ f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}_X; \\ D_\alpha &\doteq \{x \in X : \ f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}_X. \end{aligned}$$

Exemplo 2.10. Sejam $f : X \to Y$ e $\mathcal{A}_X$ uma σ-álgebra de X. Então

$$\mathcal{M} = \{E \subset Y : \ f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_X\}$$

é uma σ-álgebra em Y.

Com efeito, dado $E \in \mathcal{M}$, segue que $E \subset Y$ e $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_X$. Claramente $E^c \subset Y$. Além disso, como a imagem inversa preserva complementar temos que $f^{-1}(E^c) = f^{-1}(E)^c \in \mathcal{A}_X$ por ser σ-álgebra. Portanto $E^c \in \mathcal{M}$.

Agora, dado $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, então $f^{-1}(E_n) \in \mathcal{M}$, como a imagem inversa preserva união $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n) \in \mathcal{A}_n$ por ser σ-álgebra. Portanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$.

E, ainda, podemos induzir uma σ-álgebra num produto cartesiano de conjuntos através da σ-álgebra existente em cada componente do produto.

Exemplo 2.11. Sejam $(X_1, \mathcal{A}_{X_1})$ e $(X_2, \mathcal{A}_{X_2})$ dois espaços mensuráveis e $X = X_1 \times X_2$. Considere a família

$$\sigma_X := \{\pi_i^{-1}(A) : \ A \in \mathcal{A}_{X_i}, \ i = 1, 2\},$$

a σ-álgebra em X gerada por σ_X é chamada *σ-álgebra produto* e denotada por $\bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_{X_i}$.

3 Funções mensuráveis

Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$, como vimos, podemos construir uma boa família de subconjuntos em seu domínio (uma σ-álgebra). Contudo se tivermos uma σ-álgebra previamente definida em X podemos dizer quando uma função se "comporta bem"diante dela.

Definição 3.1. *Sejam $(X, \mathcal{A}_X)$ e $(Y, \mathcal{A}_Y)$ espaços mensuráveis. Uma função $f : X \to Y$ é dita $(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y)$-**mensurável** quando $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_X$ para todo $E \in \mathcal{A}_Y$.*

A definição nos diz que uma função é mensurável se a imagem inversa de cada elemento da σ-álgebra de Y é um elemento da σ-álgebra de X.

Se $(X, \mathcal{A}_X)$ é um espaço mensurável, simplesmente, diremos que uma função real f em X é $\mathcal{A}_X$-mensurável ou apenas mensurável, se tal função é $(\mathcal{A}_X, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mensurável. Em particular, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mensurável chamaremos de Borel mensurável.

Proposição 3.2. *Se $\mathcal{A}_Y$ é gerado por $\mathcal{E}$, então $f : X \to Y$ é $(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y)$-mensurável se, e somente se, $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_X$ para todo $E \in \mathcal{E}$.*

Demonstração. Por hipótese $f : X \to Y$ é $(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y)$-mensurável, assim $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_X$ para todo $E \in \mathcal{A}_Y$, como $\mathcal{A}_Y$ é gerado por $\mathcal{E}$ segue que $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_Y$, logo $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_X$ para todo $E \in \mathcal{E}$. Reciprocamente, $\mathcal{M} \doteq \{E \subset Y : \ f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_X\}$ é uma σ-álgebra (*exemplo* 2.10), mais ainda $\mathcal{M}$ contém $\mathcal{E}$ e portanto contém $\mathcal{A}_Y$. ■

Corolário 3.3. *Se X e Y são espaços métricos (ou topológicos) cada $f : X \to Y$ contínua é $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-mensurável.*

Demonstração. A demonstração segue do seguinte fato: f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(U)$ é aberta em X para todo aberto U em Y. □

Desta forma, no caso em que $Y = \mathbb{R}$, de acordo com as proposições 2.7 e 3.2, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : \ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}_X.$$

Claramente no exemplo 2.9 f é mensurável. Na verdade, a σ-álgebra induzida por f é construída de forma a f ser mensurável.

Os exemplos abaixo mostram que as funções que consideremos "boas"até este momento da gruaduação são, de fato, "boas".

Exemplo 3.4. Funções constantes são mensuráveis.

Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = c$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Fixe $\alpha \in \mathbb{R}$, pela proposição 3.2, basta mostrar que $f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \mathcal{A}_X$, note que

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } \alpha \geq c; \\ X, & \text{se } \alpha < c. \end{cases}$$

Portanto, $f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \mathcal{A}_X$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.5. Funções características, de qualquer elemento de uma σ-álgebra, são mensuráveis.

Sejam $(X, \mathcal{A}_X)$ um espaço mensurável e $E \in \mathcal{A}_X$. A função característica de E, $\chi_E : X \to \mathbb{R}$, é dada por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin E; \\ 1, & \text{se } x \in E. \end{cases}$$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ observe que

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : \chi_E(x) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } \alpha \geq 1; \\ E, & \text{se } 0 \leq \alpha < 1; \\ X, & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Em qualquer caso $f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \mathcal{A}_X$.

Exemplo 3.6. Um caso particular do exemplo anterior é a função de Dirichlet, a qual é Borel mensurável, por ser a função característica de $\mathbb{Q}$.

Para justificarmos esta afirmação basta verificarmos que $\mathbb{Q}$ é um conjunto de Borel. De fato, sendo $\mathbb{Q}$ enumerável basta verificarmos que o conjunto unitário formado por um ponto de $\mathbb{R}$ é de Borel. A seguinte igualdade é suficiente para garantir que $\{a\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.7. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monótona, então f é Borel mensurável.

Com efeito, suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona crescente. Seja $a \in \mathbb{R}$, queremos mostrar que $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, para isto, basta mostrar que $f^{-1}((a, \infty))$ é um intervalo. Dados $x, y \in f^{-1}((a, \infty))$ com $x \leq y$. Assim, dado $z \in [x, y]$ temos que $a \leq f(x) \leq f(z)$ então $z \in f^{-1}((a, \infty))$, disto segue que $[x, y] \subset f^{-1}((a, \infty))$, ou seja, $f^{-1}((a, \infty))$ é um intervalo. Portanto f é mensurável.

Exemplo 3.8. Se $f : X \to Y$ é $(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y)$-mensurável e $g : Y \to Z$ é $(\mathcal{A}_Y, \mathcal{A}_Z)$-mensurável, então $g \circ f : X \to Z$ é $(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Z)$-mensurável.

De fato, por hipótese temos que f e g são mensuráveis, logo

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_X, \text{ para todo } A \in \mathcal{A}_Y \text{ e } g^{-1}(B) \in \mathcal{A}_Y, \text{ para todo } B \in \mathcal{A}_Z.$$

Desta forma, obtemos que $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{A}_X$, $\forall\, B \in \mathcal{A}_Z$. Portanto $g \circ f$ é $(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Z)$-mensurável.

Determinadas combinações algébricas de funções mensuráveis também são mensuráveis, como veremos no seguinte resultado.

Proposição 3.9. *Sejam $(X, \mathcal{A}_X)$ um espaço mensurável, $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. São mensuráveis as seguintes funções: cf, $f \cdot g$, $f + g$ e $|f|$.*

Demonstração. Se $c = 0$, então cf é identicamente nula e, portanto, mensurável. Caso contrário, $c > 0$ ou $c < 0$. No primeiro caso, temos

$$A_\alpha = \{x \in X : (cf)(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha/c\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

No caso remanescente temos

$$A_\alpha = \{x \in X : (cf)(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) < \alpha/c\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Assim, basta verificarmos que $\{x \in X : \ f(x) < \alpha/c\} = \{x \in X : \ f(x) \geq \alpha/c\}^c \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e, de fato, isso ocorre pois

$$\{x \in X : \ f(x) \geq \beta\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in X : \ f(x) > \beta - \frac{1}{n} \right\}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

A fim de mostrarmos que $f + g$ é mensurável utilizaremos o seguinte decomposição de $f + g$. Seja $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$s(a, b) := a + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

e $(f, g) : X \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por

$$(f, g)(x) = (f(x), g(x)), \quad x \in X.$$

Desta maneira temos $f + g = s \circ (f, g)$, onde s é Borel mensurável já que é uma contração fraca e, consequentemente, contínua. Resta verificarmos que (f, g) é mensurável. Para tanto observe que se $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, então $\pi_1^{-1}(A)$ e $\pi_2^{-1}(A)$ são elementos geradores arbitrários da σ-álgebra produto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e

$$(f, g)^{-1}(\pi_1^{-1}(A)) = f^{-1}(A) \quad \text{e} \quad (f, g)^{-1}(\pi_2^{-1}(A)) = g^{-1}(A),$$

ou seja, $(f, g)^{-1}(\pi_i^{-1}(A)) \in \mathcal{A}_X$, $i = 1, 2$, pois f e g são mensuráveis. Portanto, $f + g$ é $\mathcal{A}_X$-mensurável.

De maneira análoga mostra-se que $f \cdot g$ também é $\mathcal{A}_X$-mensurável. Finalmente, mostrar que $|f|$ é $\mathcal{A}_X$-mensurável fica a cargo do leitor. :-) ■

4 Medidas

O conceito de medida a ser desenvolvido aqui pode, de certa forma, ser visto como uma generalização do nosso conceito de comprimento área, volume, etc., como veremos a seguir.

Definição 4.1. *Seja $(X, \mathcal{A}_X)$ um espaço mensurável. Uma* **medida** *em $(X, \mathcal{A}_X)$ é uma função $\mu : \mathcal{A}_X \to [0, +\infty]$ tal que:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) *Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{A}_X$, cujos elementos são dois a dois disjuntos, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Se μ é uma medida em $(X, \mathcal{A}_X)$, então $(X, \mathcal{A}_X, \mu)$ é chamado espaço de medida.

Veja três definições sobre medida.

(i) Se $\mu(X) < \infty$ dizemos que a medida é *finita*.

(ii) Se $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, no qual $A_n \in \mathcal{A}_X$ e $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a medida é σ-*finita*.

(ii) Se para cada $A \in \mathcal{A}_X$ com $\mu(A) = \infty$ tal que existe $F \in \mathcal{A}_X$ com $F \subset A$ e $0 < \mu(F) < \infty$, dizemos que a medida é *semifinita*.

Proposição 4.2. *Toda medida finita é σ-finita.*

Demonstração. Dado $A \in \mathcal{A}_X$ podemos decompor X da seguinte maneira: $X = A \cup A^c$ e como $\mu(X) = \mu(A \cup A^c) = \mu(A) + \mu(A^c) < \infty$ temos que $\mu(A) < \infty$ e $\mu(A^c) < \infty$. ∎

Proposição 4.3. *Toda medida σ-finita é semifinita.*

Demonstração. Suponha $(X, \mathcal{A}_X, \mu)$ um espaço de medida e μ é σ-finito. Se μ é finito, então é semifinito por vacuidade.

Agora, suponha que exista $A \in \mathcal{A}_X$ com $\mu(A) = \infty$. Como μ é σ-finito, existe uma coleção $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_X$ com $X = \bigcup_{n\in nat} X_n$ e $\mu(X_n) < \infty$ para todo n. Então

$$\infty = \mu(A) = \mu(A \cap X) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap X_n)) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A \cap X_n)$$

logo, $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A \cap X_n) = \infty$.

Em particular, existe $k \geq 1$ tal que $\mu(A \cap X_n) > 0$. Assim,

$$0 < \mu(A \cap X_k) \leq \mu(X_k) < \infty,$$

então $A \cap X_k$ é um subconjunto mensurável de A com medida finita positiva. Por isso, μ é semifinita. ∎

Exemplo 4.4. Sejam X um conjunto não enumerável e $\mathcal{A}_X$ a σ-álgebra

$$\mathcal{A}_X := \{A \subset X : \ A \text{ é enumerável ou } A^c \text{ é enumerável}\}.$$

A função $\mu : \mathcal{A}_X \longrightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } A \text{ é enumerável;} \\ 1, & \text{se } A^c \text{ é enumerável.} \end{cases}$$

é uma medida.

Exemplo 4.5. Sejam X um conjunto não vazio, $p \in X$, $\mathcal{A}_X = P(X)$ e $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = p; \\ 0, & \text{se } x \neq p. \end{cases}$$

Neste caso $\mu : \mathcal{A}_X \longrightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x)$$

é uma medida chamada por ponto de massa ou medida de Dirac.

Exemplo 4.6. Considere o espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Mostraremos que existe uma medida μ, chamada medida de Lebesgue, definida em $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ cuja medida de intervalos limitados é dada pela diferença entre o supremo e o ínfimo deste intervalo, ou seja,

$$\mu((a, b)) = b - a.$$

Propriedades atreladas as relações entre conjuntos em noções de comprimento, área, volume, etc., continuam válidas aqui como podemos ver na seguinte proposição.

Proposição 4.7. *Seja $(X, \mathcal{A}_X, \mu)$ um espaço de medida.*

(i) *Se $E, F \in \mathcal{A}_X$ e $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$. Adicionalmente, se $\mu(E) < \infty$, então*

$$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E).$$

(ii) *(Subaditividade) Se $\{A_n\}_n$ é uma família enumerável de elementos de $\mathcal{A}_X$, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(iii) *(Semicontinuidade inferior) Seja $\{E_n\}_n$ uma família enumerável de elementos de $\mathcal{A}_X$ tal que $E_n \subset E_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Tem-se*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n).$$

(iv) *(Semicontinuidade superior) Seja $\{E_n\}_n$ uma família enumerável de elementos de $\mathcal{A}_X$ tal que $E_{n+1} \subset E_n$, $n \in \mathbb{N}$ e $\mu(E_1) < \infty$. Tem-se*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n).$$

Demonstração.

(i) Se $E \subset F$, então $F = E \cup F - E$ e $E \cap (F - E) = \emptyset$. Segue que

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E) \geq \mu(E).$$

Agora, se $\mu(E) < \infty$, então $\mu(F) - \mu(E) = \mu(F - E)$.

(ii) Seja $\{E_n\}_n$ uma sequência em $\mathcal{A}_X$.
Defina $F_1 = E_1,\ F_2 = E_2 \cap E_1^c$ (observe que $F_1 \cup F_2 = E_1 \cup E_2$) e

$$F_n = E_n \cap \left(\cup_{i=1}^{n-1} E_n\right)^c,\ n \geq 2.$$

Desta maneira, $\{F_n\}_n$ é uma família de conjuntos disjuntos $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Assim,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n)$$

pois para cada $n \in nat,\ F_n \subset E_n$.

(iii) Chame $E_0 = \emptyset$ temos

$$\begin{aligned} \mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) &= \mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n - E_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n - E_{n-1}) \\ &= \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{j} \mu(E_n - E_{n-1}) = \lim_{j\to\infty} \mu(\cup_{n=1}^{j} E_n) \\ &= \lim_{j\to\infty} \mu(E_j). \end{aligned}$$

(iv) Seja $F_j = E_1 - E_j,\ j \in \mathbb{N}$. Daí, $E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_n \supset ...$ Por hipótese $F_j \subset F_{j+1},\ j \in \mathbb{N}$, assim

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_1 - E_j) = E_1 - \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Pelo item anterior

$$\lim_{j\to\infty} \mu(F_j) = \mu(\cup_{j=1}^{\infty} F_j) = \mu(E_1 - \cap_{j=1}^{\infty} E_j) = \mu(E_1) - \mu(\cap_{j=1}^{\infty} E_j).$$

Agora, $\mu(F_j) = \mu(E_1) - \mu(E_j)$ e como $\mu(E_1) < \infty$. Por isso,

$$\mu(E_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(E_j) = \mu(E_1) - \mu(\cap_{j=1}^{\infty} E_j)$$

implica $\lim_{j\to\infty} \mu(E_j) = \mu(\cap_{j=1}^{\infty} E_j)$. ■

A primeira propriedade da proposição anterior nos garante que se $(X, \mathcal{A}_X, \mu)$ é um espaço de medida e $E \in \mathcal{A}_X$ é tal que $\mu(E) = 0$, então todo $F \subset E$, com $F \in \mathcal{A}_X$, tem medida nula. Contudo, pode acontecer de $F \notin \mathcal{A}_X$ e para nos restringirmos aos casos onde isso não ocorre diremos que μ é uma *medida completa.*

Definição 4.8. *Uma medida cujo domínio contém todos os subconjuntos dos conjuntos de medida nula é chamada **medida completa.***

Mesmo que estejamos manipulando um espaço de medida cuja a medida não seja completa podemos estendê-la de maneira conveniente à um medida completa como na seguinte proposição.

Proposição 4.9. *Seja $(X, \mathcal{A}_X, \mu)$ um espaço de medida. Existe uma σ-álgebra $\overline{\mathcal{A}}_X$ contendo $\mathcal{A}_X$ e uma única extensão $\overline{\mu}$ da medida μ que é uma medida completa sobre $\overline{\mathcal{A}}_X$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A}_X : \ \mu(A) = 0\}$ e defina

$$\overline{\mathcal{A}}_X = \{E \cup F : \ E \in \mathcal{A}_X \text{ e } F \subset A \text{ para algum } A \in \mathcal{N}\}.$$

Claramente, $\mathcal{A}_X \subset \overline{\mathcal{A}}_X$ e $\overline{\mathcal{A}_X}$ é uma σ-ágebra, pois dado $E \cup F \in \overline{\mathcal{A}_X}$, podemos escrever $F \subset N$ para $N \in \mathcal{A}_X$ e assumir que $E \cap N = \emptyset$. Pois $E \cup F = E \cup (F - E)$ e $F - E \subset N - E \in \mathcal{A}_X$. Assim,

$$\begin{aligned} E \cup F &= (E \cup N) \cap (N^c \cup F) \\ &= [(E \cup N) \cap N^c] \cup [(E \cup N) \cap F] \\ &= (E \cap N^c) \cup F. \end{aligned}$$

Logo, $(E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N^c \cup F)^c$, portanto $E \cup F \in \mathcal{A}_X$.

Fechada por união enumerável.
Seja $(E_n \cup F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathcal{A}}_X$, então $E_n \in \mathcal{A}_X$ e $F_n \subset A_n \in \mathcal{N}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, assim

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cup F_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n,$$

note que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A \in \mathcal{N}$. Portanto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cup F_n) \in \overline{\mathcal{A}}_X$.

Definimos $\overline{\mu}(E \cup F) \doteq \mu(E), \ E \cup F \in \overline{\mathcal{A}}_X$.

$\overline{\mu}$ está bem definida.
Se $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$, então $F_1 \subset N_1$ e $F_2 \subset N_2$. Logo, $E_1 \subset E_2 \cup N_2$ e $E_2 \subset E_1 \cup N_1$ e

$$\mu(E_1) \leq \mu(E_2) \ \text{ e } \ \mu(E_2) \leq \mu(E_1).$$

■

4.1 Medida exterior e o Teorema de Carathéodory

Definição 4.10. *Seja $X \neq \emptyset$. Uma **medida exterior** é uma função $\mu^* : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ satisfazendo:*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ii) *Se $E \subset F$, então $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$;*

(iii) *Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é família enumerável em $P(X)$, então*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

A noção de medida exterior é uma generalizaçã de ideia que temos, por exemplo, de aproximação da área de determinada região no plano por retângulos que cobrem tal região. O seguinte resultado nos permite formalizar tal ideia.

Proposição 4.11. *Sejam $\mathcal{A} \subset P(X)$ e $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ tais que $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ e $\rho(\emptyset) = 0$. A função $\mu^* : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) : \ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \ \text{ e } \ E_j \in \mathcal{A}, \ j \in \mathbb{N}\right\},$$

é uma medida exterior.

Demonstração. Seja $X \in \mathcal{A}$, para qualquer $A \subset X$ existe $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j \quad (E_j = X, \ \forall j \in \mathbb{N}).$$

Fazendo, para cada $j \in \mathbb{N}$, $E_j = \emptyset$, temos que $\mu^*(\emptyset) = 0$. Além disso, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ para $A \subset B$, pois o conjunto do ínfimo da definição de $\mu^*(A)$ contém o conjunto da definição de $\mu^*(B)$.

Se $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset P(X)$ e $\varepsilon > 0$ para cada j existe $\{E_j^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ tal que $A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j^k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \mu^*(A_j) + \varepsilon \cdot 2^{-j}$.

Todavia, temos que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} E_j^k \ \text{ e } \ \sum_{j,k} \rho(E_j^k) \leq \sum_{j} \mu^*(A_j) + \varepsilon.$$

Concluímos que

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon.$$

Pela arbitrariedade do ε, concluímos o desejado. ■

Esta noção nos permite definir μ^*- mensurabilidade cuja ideia fundamental é nos restringir a conjuntos cuja medida exterior coincide com "medida exterior", processo semelhante ao utilizado na proposição anterior, para definir uma medida em potencial a determinado conjunto por meio de aproximações exteriores, aproximando a medida de um conjunto por medidas de conjuntos interiores a ele.

Definição 4.12. *Seja μ^* é uma medida exterior sobre um conjunto X. Um subconjunto A de X é μ^*-**mensurável** se*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \quad E \subset X.$$

A partir dos conjuntos μ^*-mensuráveis podemos definir uma σ-álgebra onde a restrição da medida exterior é uma medida completa. Este é o conteúdo do seguinte resultado, em algumas referências, chamado de *Teorema de Carathéodory.*

Teorema 4.13. *(Teorema de Carathéodory). Se μ^* uma medida exterior sobre um conjunto X, então a coleção $\mathcal{A}$ dos conjuntos μ^*-mensuráveis é uma σ-álgebra e $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ é uma medida completa.*

Demonstração. Dado $\mathcal{A}$ como no enunciado, vamos provar que é uma σ-álgebra. Primeiramente, $\mathcal{A}$ não é vazio pois $\emptyset$ é μ^*-mensurável. Como a definição de conjuntos μ^*-mensuráveis é simétrica em relação a substituir A por A^c, temos que $\mathcal{A}$ é fechado pelo complementar. Por fim, dados $A, B \in \mathcal{A}$ e $E \subset X$, temos

$$\begin{array}{rcl} \mu^*(E) & = & \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ & = & \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \\ & + & \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \\ & \geq & \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c), \end{array}$$

o que implica que $A \cup B$ é μ^*-mensurável. A última desigualdade no desenvolvimento acima segue do fato que $E \cap (A \cup B) = (E \cap A) \cup (E \cap B)$ e

$$E \cap A = (E \cap A \cap B) \cup (E \cap A \cap B^c),$$
$$E \cap B = (E \cap A^c \cap B) \cup (E \cap A \cap B^c),$$

de modo que

$$E \cap (A \cup B) \subset (E \cap A \cap B) \cup (E \cap A \cap B^c) \cup (E \cap A^c \cap B),$$

logo

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) \leq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c),$$

e do fato que $E \cap (A \cup B)^c = E \cap A^c \cap B^c$. Para provar que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra, lembramos que já sabemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra, basta considerar uniões enumeráveis disjuntas. Seja $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ uma sequência enumerável disjunta e denote $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e $B = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$; note que como $\mathcal{A}$ é uma álgebra, temos que cada $B_n \in \mathcal{A}$. Para todo $E \subset X$ temos

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}),$$

agora, por indução,

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i).$$

Daí,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c).$$

Fazendo $n \to \infty$, segue que

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap A_i) \right) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &= \mu^* \left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \right) + \mu^* \left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c \right), \end{aligned}$$

logo $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Além disso, queremos provar que $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ é uma medida completa.

Seja $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ uma sequência enumerável disjunta como no argumento anterior. Na última sequência de desigualdade, como

$$\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^* \left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c \right) \geq \mu^*(E)$$

segue que todas as desigualdades são igualdades. Em particular,

$$\mu^*(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c).$$

Tomando $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, segue que

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

portanto μ^* é uma mediada. Para verificar que ela é completa, seja $\mu^*(A) = 0$. Para qualquer $E \subset X$ temos

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E),$$

de modo que $A \in \mathcal{A}$.

4.2 A medida de Lebesgue

Seja $\mathcal{A}$ a coleção dos intervalos abertos e limitados da reta e tal que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}$. Considere a função "comprimento" $\ell : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por $\ell(\emptyset) = 0$ e dado $I \in \mathcal{A}$

$$\ell(I) = \begin{cases} \infty; & \text{se } I \text{ não é limitado;} \\ \sup I - \inf I; & \text{se } I \text{ é limitado.} \end{cases}$$

Neste caso, construindo $m^* : P(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$ como na Proposição 4.11, ou seja,

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) : \ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \ \text{ e } \ I_j \in \mathcal{A}, \ j \in \mathbb{N} \right\},$$

então m^* é a *medida exterior de Lebesgue*.

Definição 4.14. *A restrição da medida exterior de Lebesgue à σ-álgebra dos conjuntos m^*-mensuráveis é chamada* ***medida de Lebesgue****.*

Definição 4.15. *A σ-álgebra dos conjuntos m^*-mensuráveis (como na construção do Teorema de Carathéodory) é chamada de* ***σ-álgebra de Lebesgue****.*

A medida de Lebesgue goza de diversas propriedades discutidas a seguir. A partir de agora quando fizermos referência a conjuntos que estão na σ-álgebra de Lebesgue diremos, simplemente, conjuntos mensuráveis.

1- Todo intervalo é mensurável e, portanto, a medida de Lesbesgue deles coincide com seu comprimento.

Para justificar esta afirmação basta

2- Qualquer conjunto enumerável tem medida nula.

3- A σ-álgebra de Lebesgue contém a σ-álgebra de Borel.

4- A translação de um conjunto mensurável é mensurável.

A próxima propriedade a ser explorada depende do seguinte conceito.

Definição 4.16. *Dado um conjunto A mensurável, dizemos que determinada propriedade vale* ***quase sempre*** *ou para* ***quase todo ponto (q.t.p.)*** *em A se tal propriedade vale para todo $x \in A$ exceto, possivelmente, em um subconjunto A_0 de A tal que $m(A_0) = 0$.*

A Propriedade 5, a seguir, é também conhecida como Lema de Borel-Cantelli que em Teoria de Probabilidades é um resultado acerca de sequência de eventos. De acordo com a Wikipédia (eu não me responsabilizo por isso) "Se $\{E_n\}_n$ é uma sequência de eventos independentes cuja a soma de probabilidades diverge do infinito, então a probabilidade de que infinitamente muitos deles ocorram é 1". Formalmente, o resultado diz o seguinte.

5- Seja $\{E_n\}_n$ uma coleção enumerável de conjuntos mensuráveis. Se $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty$, então todo ponto de $\mathbb{R}$ pertence a um número finito de elementos da família $\{E_n\}_n$ quase sempre.

Como veremos nem todo subconjunto da reta é mensurável mas os que são mensuráveis podem ser "aproximados" por determinadas classes de conjuntos que são definidas a seguir.

Definição 4.17. *Um subconjunto de números reais é um G_δ* ***- conjunto*** *se ele é a interseção de uma coleção enumerável de conjuntos abertos. E dizemos que um subconjunto de números reais é um F_σ* ***- conjunto*** *se ele é a união enumerável de conjuntos fechados.*

Observe que estas classes de subconjuntos da reta são, claramente, de conjuntos mensuráveis. Além disso, todo conjunto aberto é um G_δ - conjunto enquanto que todo conjunto fechado é um F_σ - conjunto. Desta maneira, conjuntos unitários, também, são G_δ - conjuntos e o complementar de um G_δ - conjunto (pelas leis de De Morgan) é F_σ - conjunto.

Exemplo 4.18. O conjunto dos números irracionais é um G_δ-conjunto e o dos racionais $\mathbb{Q}$ não é.

De fato, se $\mathbb{I}$ denota o conjunto dos números irracionais, então podemos escrevê-lo como a seguinte interseção enumerável de abertos

$$\mathbb{I} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}^c.$$

Agora, se $\mathbb{Q}$ fosse um G_δ-conjunto, então poderíamos escrevê-lo como a interseção de uma família enumerável, digamos $\{A_n\}_n$, de abertos da reta. Consideremos uma enumeração $\{q_n\}_n$ de $\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q} = \bigcap_n A_n \subset A_m \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, vemos que A_m, e consequentemente $A_m \setminus \{q_m\}$ é denso em $\mathbb{R}$ e, adicionalmente,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \setminus \{q_n\} = \emptyset.$$

Assim, chegaríamos a um absurdo uma vez que tal afirmativa contraria o Teorema de Categoria de Baire que, em particular, diz que todo espaço métrico completo é um espaço de Baire, ou seja, toda coleção enumerável de abertos que são denso tem interseção densa.

Os G_δ e F_σ-conjuntos nos dão uma caracterização de mensurabilidade na reta, como se segue. Os dois primeiros itens são conhecidos como *aproximação exterior por abertos e G_δ-conjuntos*, respectivamente. Enquanto que os dois últimos como *aproximação interior por fechados e F_σ-conjuntos*, respectivamente.

Proposição 4.19. *Seja E um subconjunto de números reais. As seguintes afirmações são equivalentes à mensurabilidade de E:*

(i) *Dado $\epsilon > 0$ existe um subconjunto aberto $\mathcal{O}$ contendo E tal que*

$$m^*(E^c \cap \mathcal{O}) < \epsilon;$$

(ii) *Existe um G_δ-conjunto G contendo E tal que*

$$m^*(E^c \cap G) = 0;$$

(iii) *Dado $\epsilon > 0$ existe um subconjunto fechado $\mathcal{F}$ contido em E tal que*

$$m^*(E \cap \mathcal{F}^c) < \epsilon;$$

(iv) *Existe um F_σ-conjunto F contido em E tal que*

$$m^*(E \cap F^c) = 0.$$

O próximo resultado nos diz que conjuntosmensuráveis são "aproximadamente" uniões disjuntas de intervalos abertos. Formalmente, isto significa o seguinte.

Teorema 4.20. *Seja E um conjunto mensurável com $m(E) < \infty$. Dado $\epsilon > 0$ existe uma coleção $\{I_k\}_{k=1}^n$ de intervalos abertos e disjuntos tais que*

$$m^*(O^c \cap E) + m^*(E^c \cap O) < \epsilon, \quad \textit{onde } O = \cup_{k=1}^n I_k.$$

4.3 Conjuntos não-mensuráveis

Sabemos que a medida de Lebesgue é completa, portanto todo subconjunto de um conjunto de medida nula será mensurável. Desta maneira, nossa busca por exemplos de conjuntos não mensuráveis deve, necessariamente, acontecer em subconjuntos da reta que tenham a medida exterior de Lebesgue positiva. E isto é conteúdo do próximo resultado.

Teorema 4.21. *Qualquer conjunto de números reais tendo medida exterior de Lebesgue positiva contém um subconjunto que não é mensurável.*

Demonstração. Seja $E \subset \mathbb{R}$ tal que $m^*(E) > 0$. Sem perda de generalidade podemos supor que E é limitado.

O subconjunto de E não mensurável será construído via a seguinte relação de equivalência em E: $x \sim y$ se, e somente se, $x - y \in \mathbb{Q}$. Tal relação gera uma decomposição em subconjuntos disjuntos de E via as classes de equivalêcia do quociente $E/\sim$. Definimos C_E o subconjunto de E formado por um representante de classe de cada elemento de $E/\sim$ (que é absolutamente possível pelo Axioma da Escolha). Este conjunto C_E é um subconjunto de E não mensurável, como mostraremos a seguir.

Exercício 4.22. Todo conjunto de medida zero é enumerável?

Proposição 4.23. *O conjunto de Cantor, C é não enumerável de medida zero.*

Demonstração. O conjunto de Cantor C é dado pela interseção enumerável

$$C = \bigcap_{n=1} \infty C_n$$

onde C_n é a união de 2^n intervalos fechados disjuntos de comprimento $\frac{1}{3^n}$ (fazer para $n = 1, 2$ e 3) tal que $C_{n+1} \subset C_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Observe que C é fechado (interseção de fechados), mensurável e $m(C) \leq m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n,\ n \in$ $\mathbb{N}$

e portanto, $m(C) = 0$.

Mostremos que C não é enumerável.

Suponhamos que seja e consideremos c_{nn} uma enumeração de seus elementos.

Temos $c_1 \in C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Seja F_1, o intervalo fechado que não contém c_1.

Agora, F_1 é uma união disjunta de dois fechados e um deles não contém c_2 seja F_2 este fechado.

Novamente, F_2 é a união disjunta de intervalos fechados e um deles não contém c_3 seja este fechado F_3 e sucessivamente, obtemos uma família de fechados $\{F_n\}_n$ tal que $F_{n+1} \subset F_n,\ n \in \mathbb{N}$ e $F_n \subset C_n,\ n \in \mathbb{N}$ com $c_n \not\in F_n$.

Pela propriedade da interseção finita,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Seja $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \subset C$ e $x = c_{n_0}$ para algum $n_0 \in nat$. Assim $c_{n_0} \in F_{n_0}$, o que é uma contradição.

Exercício 4.24. Todo conjunto mensurável é de Borel?

Para respondermos a questão usaremos a função de Cantor-Lebesgue, definida a seguir.

Uma função contínua, crescente definida em $[0,1]$ cuja derivada existe e é zero quase sempre.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja O_k tal que $C_k = O_k^c \cap [0,1]$, onde O_k é a união dos $2^k - 1$ intervalos removidos durante os k estágios no processo de Cantor. Temos $O_k \subset O_{k+1}$ e

$$C = O^c \cap [0,1], \text{ onde } O = \bigcup_{k=1}^{\infty}.$$

1- Para cada k, $\varphi|_{O_k}$ crescentebem cada intervalo dos 2^k-1 que compõe O_k sendo $\frac{1}{2^k}$, $\frac{2}{2^k}$, ..., $\frac{2^{k-1}}{2^k}$, respectivamente.

2- $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(x) = \sup\{\varphi(t) : \ t \in O \cap [0,x)\}$, $x \in C - \{0\}$.

Note que $\varphi(1) = 1$.

Proposição 4.25. *A função de Cantor-Lebesgue é crescente, contínua, mapeia* $[0,1]$ *em* $[0,1]$ *e é derivável em* O.

Demonstração.

(i) φ é crescente em O;

(ii) Por continuidade sua estensão será crescente;

(iii) Mostremos que φ é contínua em $C - \{0,1\}$.

Dado $x_0 \notin O_k$ e x_0 está entre dois interalos que formam O_k sejam a_k e b_k os limites superior e inferior destes intervalos.

Temos $a_k < x_0 < b_k$ e $\varphi(b_k) - \varphi(a_k) = \frac{1}{2^k}$ para k suficientemente grande temos,

$$\lim_{t \to x_0} \varphi(t) = \varphi(x_0).$$

■

Como exemplo de uma aplicação da teoria, sugerimos que leia o artigo [3], incluímos um breve apêndice, descrevendo os estudos sobre tal artigo.

Proposição 4.26. *A função* $\varphi : [0,1] \to [0,2]$ *dada por* $\psi(x) = \varphi(x) + x, \ x \in [0,1]$ *(*φ *função de Cantor) é estritamente crescente, contínua e*

(i) $\psi(C)$ *é mensurável com medida positiva;*

(ii) *existe* $m \subset C$ *mensurável tal que* $\psi(m)$ *é não mensurável.*

Demonstração. Observe que se $O = C^c \cap [0,1]$, então $[0,1] = O \cup C$ (disjunta). Como ψ é injetora e $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 2$ temos $[0,2] = \psi(0) \cup \psi(C)$.

Ainda, como ψ possui inversa contínua, ψ é uma aplicação aberta e fechada, portanto $\psi(0)$ é aberto e $\psi(C)$ é fechado, ambos mensuráveis.

Mostremos que $m(\psi(C)) = 1$. Para tanto, mostraremos que $m(\varphi(0)) = 1$.

Seja $\{I_n\}_n$ a coleção de intervalos abertos e limitados retirados no processo de Cantor cuja união é O.

Temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi|_{I_n} = c_n$ é constante. Assim, $\psi(I_n) = I_n + c_n$, $n \in \mathbb{N}$ e $l(\psi(I_n)) = l(I_n)$ e a família $\{\psi(I_n)\}_n$ é disjunta. Logo,

$$m(\psi(0)) = \sum_{n=1}^{\infty} l(\psi(I_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = m(0) = 1.$$

Para mostrarmos (ii) observe que por $\psi(C)$ ter medida positiva, o Teorema de Vitali garante a existência de $M \subset \psi(C)$ não mensurável. Contudo $\psi^{-1}(M) \subset C$ que é mensurável e $\psi(\psi^{-1}(M)) = M$. ■

Corolário 4.27. *Existe um subconjunto que é mensurável, mas que não é Borel mensurável.*

Seja $N = \psi^{-1}(m)$ que é mensurável. Se N fosse um conjunto de Borel, então $\psi(N) = M$ também o seria e portanto, mensurável.

Isto ocorre porque funções estritamente crescentes, contínuas, definidas em intervalos levam conjuntos de Borel em Conjuntos de Borel.

De fato, se f é estritamente crescente e contínua implica em f^{-1} contínua, consequentemente B Borel, então $F(B)$ Borel.

Observe que $\{B : \ f(B) \text{ é Borel}\}$ é uma σ-álgebra contendo a σ-álgebra de Borel. Se B é aberto, $B = f(f^{-1}(B))$ é Borel.

Quando definimos mensurabilidade no caso geral e nos restringimos a reta, mudamos suavemente a definição de mensurabilidade para excluírmos casos "inóspitos". Pois com a definição geral, por exemplo, temos casos de composição de funções boas e que não são mensuráveis.

Exemplo 4.28. Seja $\psi : [0,1] \to [0,2]$ dada por $\psi(x) = \varphi(x) + x$, onde φ é a função de Cantor. Sabemos que existe $M \subset C$ (conjunto de Cantor) mensurável (que não é Borel mensurável) tal que $\psi(M) \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.

Consideremos $\psi^{-1} : [0,2] \to [0,1]$, a qual é contínua e $\mathcal{X}_M : [0,1] \to [0,1]$ a função característica de M que é Lebesgue $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$-mensurável.

Agora, $\mathcal{X}_M \circ \psi^{-1} : [0,2] \to [0,1]$ é tal que

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{X}_M \circ \psi^{-1}\right)^{-1} \left(\left(\tfrac{1}{2}, \infty\right)\right) &= \psi\left(\mathcal{X}_M^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2}\ , \infty\right)\right)\right) \\ &= \psi(M) \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{X}_M \circ \psi^{-1}$ não é $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$-mensurável.

A partir de agora, quando nos referirmos a mensurabilidade de funções queremos dizer $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$-mensurabilidade. Ou seja, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é mensurável se

$$f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R}.$$

E para funções definidas num subconjunto da reta $X \subset \mathbb{R}$, claramente $f^{-1}(\mathbb{R}) = X \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. Análogo para a reta estendida, como já vimos.

Proposição 4.29. *Uma função definida num subconjunto da reta mensurável é mensurável se, e somente se, $f^{-1}(A)$ é mensurável para todo aberto $A \subset \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e $f : M \to \mathbb{R}$. Se $f^{-1}(A) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ para todo aberto $A \subset \mathbb{R}$, então dado $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e f é mensurável. Reciprocmente, assuma f mensurável e $A \subset \mathbb{R}$

um aberto. Podemos escrever A como a união enumerável de intervalos abertos e disjuntos, ou seja,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \text{ onde } I_n = (a_n, b_n), \; n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para cada n, $I_n = (-\infty, b_n) \cap (a_n, \infty)$ e

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} I_n) = \cup_{n=1}^{\infty}(f^{-1}(-\infty, b_n) \cap f^{-1}(an, \infty))$$

e portanto, $f^{-1}(A) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. ■

Proposição 4.30. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ mensurável. Se $g = f$ em quase todo ponto, então g é mensurável.*

Demonstração. Seja $A = \{x \in M : \; f(x) \neq g(x)\}$ temos que $m(A) = 0$ e dado $\alpha \in \mathbb{R}$

$$g^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in A : \; g(x) > \alpha\} \cup \{x \in M : \; f(x) > \alpha\} \cap (M \cap A^c).$$

Como $\{x \in A : \; g(x) > \alpha\} \subset A$ ele é mensurável, e $g^{-1}((\alpha, \infty))$ é mensurável, de onde segue a mensurabilidade de g. ■

Definição 4.31. *Uma sequência de funções $\{f_n\}_n$ com domínio $X \subset \mathbb{R}$ converge para $f : X \to \mathbb{R}$ em quase todo ponto se $f_n \to f$ pontualmente em X, exceto (possivelmente) num subconjunto de X de medida nula, ou seja, $f_n(x) \to f(x), \; x \in X \cap A^c$, onde $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e $m(A) = 0$.*

Proposição 4.32. *Seja $\{f_n\}_n$ uma sequência de funções mensuráveis definida em X convergindo para $f : X \to \mathbb{R}$ em quase todo ponto. Neste caso, f é mensurável.*

Demonstração. Seja $A \subset X$ tal que $f_n(x) \to f(x), \; x \in X \cap A^c$ e $m(A) = 0$. Sabemos que f é mensurável em X se, e somente se, é mensurável em $X \cap A^c$. Então, sem perda de generalidade podemos assumir que $f_n \to f$ pontualmente em todo X.

Agora dado $\alpha \in \mathbb{R}$ verifiquemos que

$$A_\alpha = \{x \in X : \; f(x) < c\}$$

é mensurável. Observe que dados n e $j \in \mathbb{N}$,

$$A_n^j = \left\{x \in X : \; f_j(x) < c - \tfrac{1}{n}\right\}$$

é mensurável. Logo para todo $k \in \mathbb{N}$ $\bigcap_{j=k}^{\infty} A_n^j$ é mensuráel.

Consequentemente, $\bigcup_{k,n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=k}^{\infty} A_n^j\right)$ é mensurável.

Observe que esta união é $\{x \in X : \; f(x) < c\}$.

De fato, se $x \in \bigcup_{k,n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=k}^{\infty} A_n^j\right)$ então existem k e n tal que $f_j(x) < c - \frac{1}{n}, \; j \geq k$. Fazendo $j \to \infty$, temos $f(x) < c - \frac{1}{n} < c$.

Se $x \in A_\alpha$, então dado $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, existe k_n tal que $f_j(x) < c - \frac{1}{n}, \; j \geq k_n$, logo

$$x \in \bigcap_{j=k_n}^{\infty} A_n^j.$$

■

5 Integração de Lebesgue

Este conceito de integração é definido via funções simples e para tanto precisamos definir este conceito.

Definição 5.1. *Uma função $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$, X mensurável, é simples se sua imagem é uma conjunto finito e φ é mensurável.*

Exemplo 5.2. Toda função característica de um mensurável é uma função simples ($\chi_{\mathbb{R}} = 1.\chi_{\mathbb{R}} + 0.\chi_{\mathbb{R}}$).

Exemplo 5.3. Uma função é simples se, e somente se, é combinação linear de funções características de conjuntos mensuráveis.

Sejam $E_1, E_2, ..., E_n \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$, então $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \ \chi_{E_i}(x),$$

claramente tem a imagem como um conjunto finito. Reciprocamente, seja $\{c_1, c_2, ..., c_n\} = Im(\varphi)$, então $E_i = \{x \in X : \ \varphi(x) = c_i\}$ é mensurável e $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \ \chi_{E_i}$.

Teorema 5.4. *(Aproximação por funções simples). Seja $f : E \to \mathbb{R}$ com E mensurável. Então, f é mensurável se, e somente se, existe uma sequência de funções simples em E convergindo pontualmente para f.*

Demonstração. Dada qualquer $f : E \to \mathbb{R}$ podemos decompor f como $f = f_+ - f_-$, onde $f_+(x) = \sup\{f(x), \ 0\}$ e $f_-(x) = \sup\{-f(x), \ 0\}$, $x \in E$. Ainda $|f| = f_+ + f_-$, assim $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ e $f^- = \frac{|f|-f}{2}$. Assim, f é mensurável se, e somente se, f_+ e f_- o são.

Logo, sem perda de generalidade podemos assumir f não negativa. Basta verificarmos que se f é mensurável existe uma sequência de funções simples conergindo para ela. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $k = 0, 1, ..., n2^n - 1$ e a coleção de conjuntos mensuráveis

$$E_k^n \doteq \{x \in E : \ k2^{-n} < f(x) \leq (k+1)2^{-n}\}$$

e

$$E_{n2^n}^n \doteq \{x \in E : \ f(x) \geq n\}.$$

Para cada n, a família $\{E_k^n\}_{k=0}^{n2^n}$ é disjunta e $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n} k2^{-n}\chi_{E_k^n}$ é mensurável tal que $0 \leq f(x) - \varphi_n(x) \leq 2^{-n}$. De onde segue o resultado. ■

Definimos o conceito de integração via a integral de funções simples, para tanto definimos a integral de uma função simples não negativa

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \ \chi_{E_j}, \ a_j \geq 0, \ j = 1, 2, ..., n$$

por

$$\int \varphi \ dm = \sum_{j=1}^{n} a_j \ m(E_j).$$

Se $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ (é mensurável), então definimos $\int_A \varphi \ dm = \int \varphi.\chi_A \ dm$, sendo $\varphi.\chi_A = \sum_{j=1}^{n} a_j \ \chi_{E_j \cap A}$.

Exemplo 5.5. A função de Dirichlet (que não é Riemann integrável)

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Claramente, $\int \chi_{\mathbb{Q}} \; dm = m(\mathbb{Q}) = 0$.

Proposição 5.6. *Sejam φ e ψ funções simples, não negativas.*

(i) *Se $c \geq 0$, então $\int c\varphi \; dm = c \int \varphi \; dm$;*

(ii) *$\int (\varphi + \psi) \; dm = \int \varphi \; dm + \int \psi \; dm$;*

(iii) *Se $\varphi \leq \psi$, então $\int \varphi \; dm \leq \int \psi \; dm$;*

(iv) *$\mu : \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ dada por $\mu(A) = \int_A \varphi \; dm$ é uma medida em $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.*

Demonstração.

(i) Segue diretamente da definição.

(ii) Suponha φ e ψ dadas por (representação canônica)

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \text{ e } \psi = \sum_{j=1}^{m} b_j F_j.$$

Para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$ escrevemos

$$E_j = \bigcup_{k=1}^{m} (E_j \cap F_k); j = 1, 2, ..., n$$

e

$$F_j = \bigcup_{k=1}^{n} (F_j \cap E_k); j = 1, 2, ..., m$$

assim,

$$\begin{aligned} \int \varphi + \int \psi &= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap E - k) \right) + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} \mu(F_k \cap E_k) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k). \end{aligned}$$

Por outro lado, $\int \varphi + \int \psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k)$ pois

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \chi_{(E_j \cap F_k)}.$$

(iii) Se $\varphi \leq \psi$, então $a_j \leq b_k$ sempre que $E_j \cap E_k \neq \emptyset$, logo

$$\int \varphi = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap E_k) \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} B_k \mu(E_j \cap E_k) = \int \psi.$$

(iv) Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência disjunta

$$\begin{aligned}\int_A \varphi \ dm &= \int \varphi\chi_A \ dm = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j \cap A) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \varphi.\end{aligned}$$

$$\int_\phi \varphi \ dm = \int \varphi\chi_\phi \ dm = 0$$

■

Definição 5.7. *Escrevemos L^+ para a coleção de funções mensuráveis e não negativas. A integral de $f \in L^+$ é dada por*

$$\int f \ dm = \sup\{\int \varphi \ dm : 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \ simples\}.$$

Se f é simples, a proposição anterior garante que $\int f \ dm$ coincide com a definição inicial. Se $m \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, então

$$\int_m f \ dm = \int f\chi_m \ dm.$$

Proposição 5.8. *Sejam $f, \ g \in L^+$ e $\alpha, \beta \geq 0$.*

(i) $\int f + g \ dm = \int f \ dm + \int g \ dm$;

(ii) $\int cf \ dm = c \int f \ dm$;

(iii) *Se $f \leq g$, então $\int f \ dm \leq \int g \ dm$;*

(iv) *Se $E, \ F \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e $E \subset F$, então*

$$\int_E f \ dm \leq \int_F f \ dm.$$

Demonstração. Note que (ii) segue diretamente da definição de integração. Já (iv), basta observarmos que $f \cdot \chi_E \leq f \cdot \chi_F$ e de (iii) segue o resultado. Para demonstrarmos (i) e (ii) fazemos uso do seguinte resultado a respeito de convergência. ■

Teorema 5.9. *(Teorema da Convergência Monótona).*
Se $\{f_n\}_n$ é uma sequência crescente em L^+ convergindo para f, então

$$\int f \ dm = \lim_{n\to\infty} \int f_n \ dm.$$

Demonstração. Claramente f é mensurável e não negativa. Além disso,

$$\int f_n\ dm \leq \int f_{n+1}\ dm \leq \int f\ dm,\ n \in \mathbb{N}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\ dm \leq \int f\ dm.$$

Mostremos a desigualdade contrária.

Seja φ simples tal que $0 \leq \varphi \leq f$ e $0 < \alpha < 1$, definimos

$$A_n := \{x \in \mathbb{R} :\ f(x) \geq \alpha\varphi(x)\},\ n \in \mathbb{N}.$$

A sequência $\{A_n\}_n$ é crescente em $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, ou seja, $A_n \subset A_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$, cuja união é $\mathbb{R}$. Logo,

$$\int_{A_n} \alpha\varphi\ dm \leq \int_{A_n} f_n\ dm \leq \int f_n\ dm,\ n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado,

$$\int_{A_n} \alpha\varphi\ dm = \alpha \int_{A_n} \varphi\ dm \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \int \varphi\ dm.$$

Logo, $\alpha \int \varphi\ dm \leq \lim_{n\to\infty} f_n\ dm$ e fazendo $\alpha \to 1$, temos $\int \varphi\ dm \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n\ dm$. Como φ é arbitrária, $\int f\ dm \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n\ dm$. ■

Voltando a demonstração da proposição 5.8 (i) Sejam $\{\varphi_n\}_n$ e $\{\psi_n\}_n$ sequências simples, crescentes tais que $\varphi_n \to f$ e $\psi_n \to g$. Então, $\{\varphi_n + \psi_n\}_n$ é uma sequência monótona crescente de funções simples convergindo para $f + g$, segue que

$$\begin{aligned} \int (f+g)\ dm &= \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n + \psi_n) dm \\ &= \int f\ dm + \int g\ dm. \end{aligned}$$

Análogo para (ii).

Corolário 5.10. *(Convergência monótona). Se $f \in m^t$ então $\lambda(E) = \int_E f\ dm$ é uma medida.*

Lema 5.11. *(Lema de Fatou). Troca de sinal de integração com série e $f = 0$ para quase todo ponto, se e somente se, $\int f\ dm = 0$.*

Definição 5.12. *Escrevemos $L = L(\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$ (ou $L = L(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$) a coleção das funções mensuráveis definidas em $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) que tem as partes positivas e negativas*

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\},\ x \in \mathbb{R}*$$

integráveis (integral finita).

Neste caso, definimos a integral de f como

$$\int f\ dm = \int f^+\ dm - \int f^-\ dm$$

e se $m \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$

$$\int_m f\ dm = \int_m f^+\ dm - \int_m f^-\ dm.$$

5.1 Propriedades

Para funções não negativas o conceito coincide e ser integrável significa ter integral finita.

Teorema 5.13. *$f \in L$ se, e somente se, $|f| \in L$.*

Demonstração. Se $f \in L$, então f^+ e f^- tem integrais finita e pela aditividade de integrais para funções não negativas, sendo $|f| = f^+ + f^-$, $|f|^+ = f^+ + f^-$ e $|f|^- = 0$ são integráveis e $|f|$ é integrável. Reciprocamente, se $|f|$ é integrável, então $\int (f^+ + f^-)\, dm < \infty$ e $\int f^+\, dm$, $\int f^-\, dm$ são finitas. Adicionalmente,

$$\begin{aligned} \left|\int f\, dm\right| &= \left|\int f^+\, dm - \int f^-\, dm\right| \\ &< \left|\int f^+\, dm\right| + \left|\int f^-\, dm\right| \\ &= \int f^+\, dm + \int f^-\, dm = \int |f|\, dm. \end{aligned}$$

■

Teorema 5.14. *Se $f, g \in L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\int \alpha f\, dm = \alpha \int f\, dm$ e $\int (f+g)\, dm = \int f\, dm + \int g\, dm$.*

Demonstração. Se $\alpha = 0$ não há nada a ser demonstrado. Se $\alpha > 0$, então $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ e $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, de onde segue a integrabilidade de αf. Agora se $\alpha < 0$, então $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ e $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$ e a integrabilidade de funções não negativas segue o resultado.

A segunda propriedade segue do fato que se $f, g \in L$ então $|f|, |g| \in L$, $|f+g| \leq |f| + |g|$ e $\int |f+g|\, dm < \infty$. Logo, $f + g \in L$. Para mostrarmos a igualdade observe que

$$(f+g) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

e se $h = f_1 - f_2 \in L$ com f_1 e $f_2 \in m^+$, então $h^+ - h^- = f_1 - f_2$, assim $h^+ + f_2 = f_1 + h^-$ e $\int f_1\, dm - \int f_2\, dm = \int h$. De onde segue o resultado. ■

Corolário 5.15. *Se $f \in L$ e $m_1, m_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ são disjuntos, então*

$$\int_{m_1 \cup m_2} f\, dm = \int_{m_1} f\, dm + \int_{m_2} f\, dm.$$

Como $|f \cdot \chi_{m_1}| \leq |f|$, $i = 1, 2$, $f \cdot \chi_i$ são integráveis e $f \cdot \chi_{m_1 \cup m_2} = f \cdot \chi_{m_1} + f \cdot \chi_{m_2}$.

Teorema 5.16. *(Teorema da convergência dominada). Seja $\{f_n\}_n$ uma sequência de funções em L convergindo quase sempre para f mensurável. Se existe $g \in L$ tal que $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, dm.$$

Demonstração. Como $|f| \leq g$, $|f|$ é integrável e portanto f é integrável. A sequência de funções $\{g + f_n\}_n$ é de funções não negativas e o lema de Fatou (lema 5.11) implica

$$\begin{aligned} \int g\, dm + \int f\, dm &\leq \liminf \int (g + f_n)\, dm \\ &= \int g\, dm + \liminf \int f_n\, dm \end{aligned}$$

e

$$\int f\ dm \leq \liminf \int f_n\ dm.$$

Por outro lado, $\{g - f_n\}_n$ também é uma sequência de funções não negativas e novamente o lema de Fatou implica

$$\begin{aligned} -\int f\ dm &\leq \liminf \int (-f_n)\ dm \\ &= \liminf -\int f_n\ dm \\ &= -\limsup \int f_n\ dm. \end{aligned}$$

Logo, $\int f\ dm \geq \limsup \int f_n\ dm$. ■

5.2 Relação entre a integral de Riemann e de Lebesgue

Teorema 5.17. *Toda função mensurável e limitada em um conjunto de medida finita é integrável sobre ele.*

Demonstração. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ mensurável e limitada, onde $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ tal que $m(M) < \infty$. Sem perda de generalidade podemos assumir f não negativa, pois sendo f limitada existe $c \geq 0$ tal que $|f| = f^+ + f^- \leq c$. Assim, f^+ e f^- são limitadas (e mensuráveis) se, e somente se, f^+ e f^- o são. Sendo assim, basta verificarmos que $\int_M ffm < \infty$ e o resultado estará provado.

Observe que

$$\begin{aligned} \int_M f\ dm = \int f \cdot \chi_M\ dm &= \sup\left\{\int \varphi\ dm :\ 0 \leq \varphi \leq f \cdot \chi_M\right\} \\ &\leq \sup\left\{\int \varphi\ dm :\ 0 \leq \varphi \leq c \cdot \chi_M\right\}. \end{aligned}$$

Agora se φ é uma função simples, não negativa, tal que $\varphi \leq c \cdot \chi_M$, então

$$\int \varphi\ dm \leq \int c \cdot \chi\ dm = c \cdot m(M).$$

Portanto, $\int_M f\ dm < \infty$ e f é integrável sobre M. ■

Para o próximo resultado onde estabelecemos a relação entre as integrais de Riemann e Lebesgue precisamos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 5.18. *Sejam $\{\varphi_n\}_n$ e $\{\psi_n\}_n$ sequências de funções integráveis sobre M, crescente e decrescente, respectivamente. Se $f : M \to \mathbb{R}$ é tal que $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$, $n \in \mathbb{N}$ e as sequências $\{\varphi_n\}_n$ e $\{\psi_n\}_n$ satisfazem*

$$\lim_{n\to\infty} \int_M (\psi_n - \varphi_n)\ dm = 0,$$

então f é integrável sobre M. Adicionalmente:

$$\int_M f\ dm = \lim_{n\to\infty} \int_M \varphi_n\ dm$$

ou

$$\int_M f\ dm = \lim_{n\to\infty} \int_M \psi_n\ dm.$$

Demonstração. Sejam φ e ψ dadas por

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \quad \text{e} \quad \psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x),\ x \in M$$

as quais são funções mensuráveis de M em $\overline{\mathbb{R}}$.

Assim, a sequência $\{\psi_n - \varphi_n\}_n$ converge para $\psi - \varphi$, a qual é mensurável e não negativa. Ainda, $\psi - \varphi \leq \psi_n - \varphi_n,\ n \in \mathbb{N}$ pois sendo $\{\varphi_n\}_n$ decrescente $\psi \leq \psi_n,\ n \in \mathbb{N}$ e sendo $\{\varphi_n\}_n$ crescente, $\varphi \geq \varphi_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Logo,

$$0 \leq \int_M (\psi - \varphi)\ dm \leq \int_M (\psi_n - \varphi_n)\ dm \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e, portanto, $\int_M (\psi - \varphi)\ dm = 0$ donde $\psi = \varphi$ em quase todos os pontos.

Consequentemente, $\psi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em quase todos os pontos (bem como $\varphi_n \to f$) e isso justifica a mensurabilidade de f.

Também, $\varphi \leq f \leq \psi$ e $0 \leq f - \varphi_1 \leq \psi - \varphi_1 \leq \psi_1 - \varphi_1$ como $\varphi_1 - \psi_1$ é integrável $f - \varphi_1$ também o é e $f \in L$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_E \psi_n\ dm - \int_E f\ dm \right) &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_E (\psi_n - f)\ dm \right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_E (\psi_n - \varphi_n)\ dm \right) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_E f\ dm - \int_E \varphi_n\ dm \right) &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_E (f - \varphi_n)\ dm \right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_E (\psi_n - \varphi_n)\ dm \right) = 0. \end{aligned}$$

■

Teorema 5.19. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, f é integrável no sentido de Riemann se, e somente se, o conjunto dos pontos onde f é descontínua tem medida nula.*

Demonstração. Suponha f Riemann integrável. Seja $\{P_n\}_n$ uma sequência de partições de $[a, b]$ tal que $P_n \subset P_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$ e $|P_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Para cada n, suponha a subdivisão de $[a, b]$ em m_n intervalos $\{I_i^n\}_{i=1}^{m_n}$ e defina a sequência de funções simples

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{m_n} \inf_{I_i^n} f(x) \cdot \chi_{I_i^n}$$

e

$$\psi_n = \sum_{i=1}^{m_n} \sup_{I_i^n} f(x) \cdot \chi_{I_i^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Observe que as sequências $\{\varphi_n\}_n$ e $\{\phi_n\}_n$ de funções integráveis são crescente e decrescente, respectivamente, tais que

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n,\ n \in \mathbb{N}$$

e sendo,

$$\int \varphi \; dm = \sum_{i=1}^{m_n} \inf_{I_i^n} f(x) \cdot m(I_i^n) = L(f, P_n) \text{a soma inferior de Riemann}$$

e

$$\int \psi_n \; dm = U(f, p_n) \text{a soma superior de Riemann}$$

temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} (\psi_n - \varphi_n) \; dm = 0.$$

Logo, o lema anterior nos garante que f é integrável e ψ_n é tal que $\psi_n \to f$ em quase todo ponto.

Seja D o conjunto dos pontos onde a convergência $\varphi_n(x) \to f(x)$ ou $\psi_n(x) \to f(x)$ falha. Temos $m(D) = 0$ e seja $D_0 = D \cup \{P_n\}_n$, neste caso $m(D_0) = 0$. Mostremos que D_0 contém os pontos de descontinuidade de f. Ou seja, que f é contínua em $D_0^c \cap [a, b]$. De fato, seja $x_0 \in D^c \cap D_0$ e $\varepsilon > 0$. Como $\{\varphi_n(x_0)\}_n$ e $\{\psi_n(x_0)\}_n$ convergem para $f(x_0)$ seja n_0 tal que

$$f(x_0) - \varepsilon < \varphi_{n_0}(x_0) \leq f(x_0) \leq \psi_{n_0}(x_0) < f(x_0) + \varphi.$$

Como $x_0 \notin P_{n_0}$ seja $\delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I_i^{n_0}$ para algum i. Logo, $|x - x_0| < \delta$ implica $\varphi_{n_0}(x_0) = \varphi_{n_0}(x) \leq f(x) \leq \psi_{n_0}(x_0) = \psi_{n_0}(x)$ implicando $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ e f é contínua em x_0. Reciprocamente, nas notações iniciais da prova basta mostrarmos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} (\psi_n - \varphi_n) \; dm = 0. \tag{5.1}$$

Para tanto mostremos que $\psi_n \to f$ e $\varphi_n \to f$ em quase todo ponto, neste caso, o teorema da convergência dominada garante 5.1. Mostremos que $\varphi_n \to f$ e $\psi_n \to f$ em $C - \cup\{P_n\}_n$, onde C é o conjunto dos pontos no qual f é contínua.

Sejam $x_0 \in C - \cup\{P_n\}_n$ e $\varepsilon > 0$. Dado também $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e seja n_0 tal que $|P_n| < \delta,\ n \geq n_0$ e I_i^n que contém x_0. Neste caso, $I_i^n \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi_n(x_0) \leq f(x_0) \leq \psi_n(x_0) \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

segue que $0 \leq \psi_n(x_0) - f(x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e $0 \leq f(x_0) - \varphi_n(x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, de onde segue a convergência. ■

5.3 O Teorema de Lebesgue

Objetivo: Teorema de diferenciação de Lebesgue. Estabelecido em 1904 por Lebesgue que diz que toda função contínua monótona é diferenciável quase sempre. Em aproximadamente 1911 estabeleceu a prova sem a hipótese de continuidade.

Lema 5.20. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $P = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Se F é um subconjunto não vazio de $\{1, 2, ..., n\}$, $A > 0$, $f(a) \leq f(b)$ e*

$$\frac{f(a_k) - f(a_{k-1})}{a_k - a_{k-1}} < -A,\ k \in S,$$

então,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(a_k) - f(a_{k-1})| > |f(b) - f(a)| + A\left(\sum_{k\in S}(a_k - a_{k-1})\right).$$

Demonstração. Como $f(a) \leq f(b)$ temos

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| = f(b) - f(a) &= \sum_{k=1}^{n}(f(a_k) - f(a_{k-1})) \\ &= \sum_{k\in S}(f(a_k) - f(a_{k-1})) + \sum_{k\notin S}(f(a_k) - f(a_{k-1})) \\ &< -A\sum_{k\in S}(a_k - a_{k-1}) + \sum_{k\notin S}(f(a_k) - f(a_{k-1})), \end{aligned}$$

logo,

$$\sum_{k\notin S}(f(a_k) - f(a_{k-1})) > |f(b) - f(a)| + A\sum_{k\in S}(a_k - a_{k-1})$$

de onde segue o resultado. ■

Observação: Seja $g = -f$, então $f(a) \leq f(b)$ implica $g(a) \geq g(b)$,

$$\frac{g(a_k) - g(a_{k-1})}{a_k - a_{k-1}} > A,\ k \in S$$

e a condução permanece a mesma para g.

Lema 5.21. *Seja E um subconjunto de (a, b) que não tem medida nula. Para toda coleção $\mathcal{F}$ de subintervalos abertos de $[a, b]$ cobrindo E, existe uma subcoleção finita e disjunta $\{I_1, I_2, ..., I_n\}$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| > \frac{m(E)}{3}.$$

Demonstração. Temos $A = \bigcup_{I\in\mathcal{F}} I$ é aberto, então existe uma sequência de intervalos abertos $\{(a_n, b_n)\}_n$ disjuntos tais que $A = \bigcup_n (a_n, b_n)$.

Como $E \subset A$, $m(E) \leq m(A)$, ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \geq m(E).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhemos $a'_n, b'_n \in (a_n, b_n)$ tais que $b'_n - a'_n = \frac{3}{4}(b_n - a_n)$. Assim, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b'_n - a'_n) = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \geq \frac{3}{4}m(E).$$

Para cada $x \in [a'_n, b'_n] \subset (a_n, b_n)$ existe $J_x \in \mathcal{F}$ tal que $x \in J_x \subset (a_n, b_n)$ (caso contrário $\{a_n, b_n\}_n$ não seria disjunta).

Desta maneira, $\{J_x\}_{x\in[a'_n, b'_n]}$ é uma cobertura aberta para $[a'_n, b'_n]$ que é compacto. De onde segue que existem $n_1, n_2, ..., n_k$ tais que $J_{n_1}, J_{n_2}, ..., J_{n_k}$ são elementos da cobertura aberta e $[a'_n, b'_n] \subset \bigcup_{i=1}^{k} J_{n_i}$.

Se algum J_{n_i} está contido na união dos anteriores, então podemos descartá-lo da coleção finita que cobre $[a'_n, b'_n]$. Sendo assim, a subcoleção finita $\{J_{n_1}, J_{n_2}, ..., J_{n_k}\}$ pode ser tomada satisfazendo o seguinte:

Cada J_{n_i} contém um ponto x_{n_i} tal que $x_{n_i} \notin J_{n_j}$ e podemos assumir que $x_{n_1} < x_{n_2} < ... < x_{n_k}$. Segue que $\{J_{n_i}\}_{n_i \text{ par}}$ e $\{J_{n_i}\}_{n_i \text{ ímpar}}$ são subcoleções de $\mathcal{F}$ finitas e

$$\sum_{n_i \text{ par}} |J_{n_i}| \text{ ou } \sum_{n_i \text{ ímpar}} |J_{n_i}| > \frac{\sum_{i=1}^{k} |J_{n_i}|}{2}.$$

Seja $\mathcal{F}_n$ a coleção que satisfaz a desigualdade acima. Assim, temos

$$\sum_{I \in \mathcal{F}_n} |I| \geq \left(\sum_{i=1}^{k} |J_{n_i}| \right) /2 \geq (b'_n - a_n)/2.$$

Desta maneira, para cada $n \in \mathbb{N}$, associamos a subcoleção finita $\mathcal{F}_n$ de $\mathcal{F}$ a qual satisfaz 5.2. Logo, a família $\{\mathcal{F}_n\}_n$ é tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I \in J} |I| \geq \sum_{n=1}^{\infty} (b'_n - a'_n)/2 \geq \frac{3}{8} m(E).$$

Consideremos uma enumeração $\{I_n\}_n$ de $\{\mathcal{F}_n\}_n$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \geq \frac{3}{8} m(E)$$

implicando que existe N suficientemente grande tal que

$$\sum_{n=1}^{N} |I_n| \geq \frac{m(E)}{3}.$$

■

Observação: Nas condições do lema anterior, substitua $\mathcal{F}$ cobrindo E por $\mathcal{F}$ cobrindo $E - P$. Adicionalmente a $\mathcal{F}$ intervalos abertos suficientemente pequenos centrados em pontos de P e usando o lema anterior podemos mostrar que existe uma subcoleção finita $\{I_1, I_2, ..., I_n\}$ de $\mathcal{F}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{N} |I_k| > \frac{m(E)}{4}.$$

Teorema 5.22. *(Lebesgue). Se f é crescente em $[a, b]$, então $f'(x)$ existe para quase todo ponto em $[a, b]$.*

Demonstração. Denotaremos por $\overline{D}f(x)$ e $\underline{D}f(x)$ os seguintes limites

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

e

$$\underline{D}f(x) = \liminf_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Claramente, $\overline{D}f(x) \geq \underline{D}f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ e quando $\overline{D}f(x) = \underline{D}f(x)$, $f'(x)$ existe.

Mostraremos que $F := \{x \in (a, b) : \overline{D}f(x) > \underline{D}f(x)\}$ tem medida zero e $F_\infty := \{x \in (a, b) : \underline{D}f(x) = \infty\}$ também. Isto será feito em três passos.

(1) Podemos considerar F interseção o conjunto dos pontos de continuidade de f e, sem perda de generalidade, mostrando que este conjunto tem medida zero o resultado estará provado, pois toda função não decrescente em um intervalo fechado é contínua exceto, possivelmente, num conjunto enumerável (o qual tem medida nula).

De fato, seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ não decrescente. Seja

$$D := \{x \in [0,1] : \; g \text{ não é contínua em } x\},$$

então D pode ser caracterizado pelos pontos de $[0,1]$ tais que $g(\overline{x}) < g(x^+)$. Logo, dado $x \in D$, existe $q_x \in \mathbb{Q}$ tal que $g(x^-) < q_x < g(x^+)$.

Desta maneira, definimos $h : D \to \mathbb{Q}$ com $h(x) = q_x$.

Observe que se $x < y$, então $g(x^+) \leq g(y^-)$ e $h(x) \neq h(y)$. O que é suficiente para garantir que h é injetora e, portanto, D é enumerável.

(2) A fim de mostrarmos, então, que

$$F : \{x \in (a,b) : \; f \text{ é contínua em } x \text{ e } \overline{D}f(x) > \underline{D}f(x)\}$$

tem medida zero, mostraremos que

$$E_{r,s} := \{x \in (a,b) : \; f \text{ é contínua em } x \text{ e } \overline{D}f(x) > r > s > \underline{D}f(x)\}$$

tem medida zero para todo $r, s \in \mathbb{Q}$, pois $F = \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}} E_{r,s}$.

(3) Suponha que existam $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $m(E_{r,s}) > 0$. Sejam $A = \frac{(r-s)}{2}$, $B = \frac{r+s}{2}$ e $g = f - B_x$. Temos que $A > 0$ e $E_{r,s}$ pode ser caracterizado como

$$E_{r,s} := \{x \in (a,b) : \; g \text{ é contínua em } x; \; \overline{D}g(x) > A \text{ e } \overline{D}g(x) < -A\}.$$

O conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| : \; P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \text{ partição de } [a,b] \right\}$$

é limitado por $f(b) - f(a) + B(b-a)$. Assim, existe um supremo para ele digamos S. Desta maneira existe uma partição P de $[a,b]$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| > S - \frac{m(E_{r,s})A}{4}.$$

Se $x \in E_{r,s} - P$, então $\overline{D}g(x) > A$ e $\underline{D}g(x) < -A$. Como g é contínua em x, existe um intervalo aberto contendo x, $(a_x, b_x) \subseteq (x_{k-1}, x_k)$ para algum k. E

$$\frac{g(x_k) - g(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \begin{cases} < -A \\ \text{ou} \\ > A. \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{F} := \{(a_x, b_x) : \; x \in E_{r,s} - P\}$ é uma coleção de abertos cobrindo $E_{r,s} - P$ e pelo Lema 5.18, existe uma subcoleção finita de $\mathcal{F}$, $I_1, I_2, ..., I_n$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| > \frac{m(E_{r,s})}{4}.$$

Agora seja $\mathbb{Q} = P \cup \{\text{pontos finais de } I_{k's}\} = \{y_0, y_1, ..., y_q\}$ para cada $[x_{k-1}, x_k]$, Lema 5.20 implica

$$\sum_{y_i \in [x_{k-1}, x_k]} |g(y_i) - g(y_{i-1})| > |g(x_k) - g(x_{k-1})| + AL_k$$

no qual L_k é a soma dos comprimentos dos intervalos $I_i \in [x_{k-1}, x_k]$. Agora,

$$\begin{aligned}
\sum_K \sum_{y_i \in [x_{k-1}, x_k]} |gy_i() - g(y_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{q} |g(y_i) - g(y_{i-1})| \\
&> \sum_k |g(x_k) - g(x_{k-1})| + A \sum_{k=1}^{N} |F_k| \\
&> s - \frac{A \cdot m(E_{r,s})}{4} + \frac{A \cdot m(E_{r,s})}{4} \\
&= s.
\end{aligned}$$

Contradizendo a escolha de S.

Corolário 5.23. *Se f é não decrescente em $[a, b]$, então f' é integrável e*

$$\int f' \leq f(b) - f(a).$$

Demonstração. Se f é não decrescente em $[a, b]$, então f é mensurável e portanto

$$g_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, $\{g_n\}_n$ converge quase toda parte para f' (Teorema de diferenciação de Lebesgue). Segue pelo Lema de Fatou que

$$\int_{[a,b]} f' \leq \lim_{n \to \infty} \inf \int_{[a,b]} g_n.$$

□

(4) F_∞ tem medida nula.

Suponha que não, então $m(F_\infty) > 0$. Seja $M > 0$ arbitrário. Se $x \in F_\infty$, então $\underline{D}f(x) > M$ e existem $a_x, b_x \in (a, b)$ tais que $(a_x, b_x) \subset (a, b)$ e

$$\frac{f(b_x) - f(a_x)}{b_x - a_x} > M.$$

Assim $\mathcal{F} = \{(a_x, b_x) : \ x \in F_\infty\}$ cobre F_∞ e pelo Lema 5.21, existe uma subcoleção finita de $\mathcal{F}, \{I_1, I_2, ..., I_n\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |I_n| > \frac{m(F_\infty)}{3}.$$

Sendo f crescente e $I_i = (a_i, b_i)$

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &\geq \sum_{k=1}^{n} (f(b_k) - f(a_k)) \\ &> \sum_{k=1}^{n} M \cdot (b_k - a_k) \\ &> \frac{M}{3} m(F_\infty). \end{aligned}$$

Como M é arbitrário, $f(b) - f(a) = \infty$ o que é um absurdo.

6 Exercícios resolvidos

Exercício 6.1. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre um conjunto X. Mostre que para todo $A,\ B \in \mathcal{A},\ A \cap B,\ A \setminus B,\ A \triangle B \in \mathcal{A}$.

Solução:
i. $A \cap B \in \mathcal{A}$: Como $A, B \in \mathcal{A}$ temos que $A^c, B^c \in \mathcal{A}$. Logo, $A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$ e, portanto, $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$.
ii. $A \setminus B \in \mathcal{A}$: Utilizando que $A, B^c \in \mathcal{A}$, pelo item 1, temos que $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.
iii. $A \triangle B \in \mathcal{A}$: Utilizando o item 2, temos que $A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{A}$, então $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$.

Exercício 6.2. Se $\mu_1,\ \cdots,\ \mu_n$ são medidas em $(X,\ \mathcal{A})$ e $a_1,\ \cdots,\ a_n \in [0, \infty)$, então mostre que $\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j$ é uma medida em $(X,\ \mathcal{A})$.

Solução:

- $\mu(\emptyset) = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j(\emptyset) = 0$;
- Dado $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ disjuntas. Então,

$$\mu(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{j=1}^n a_j \sum_{i=1}^\infty \mu_j(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^n a_j \mu_j(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i).$$

Portanto, μ é uma medida em $(X,\ \mathcal{A})$.

Exercício 6.3. Sejam $(X,\ \mathcal{A},\ \mu)$ é um espaço de medida e $E,\ F \in \mathcal{A}$. Mostre que $\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \mu(F)$, se $\mu(F \setminus E) < \infty$.

Solução: Observando que $E \cup F = E \cup (F \setminus E)$ e $F = (F \setminus E) \cup (F \cap E)$, onde as uniões são disjuntas, segue que $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$ e $\mu(F) = \mu(F \setminus E) + \mu(F \cap E)$. Logo, $\mu(E \cup F) + \mu(F \setminus E) + \mu(F \cap E) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) + \mu(F)$. Portanto, como $\mu(F \setminus E) < \infty$, concluímos que $\mu(E \cup F) + \mu(F \cap E) = \mu(E) + \mu(F)$.

Exercício 6.4. Se $(X,\ \mathcal{A},\ \mu)$ é um espaço de medida e $E \in \mathcal{A}$, defina $\mu_E(A) = \mu(E \cap A)$ para $A \in \mathcal{A}$. Mostre que μ_E é uma medida.

Solução:

- $\mu_E(\emptyset) = \mu(E \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$;
- Dado $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ disjuntas. Então,

$$\mu_E(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \mu(E \cap (\cup_{i=1}^\infty A_i)) = \mu(\cup_{i=1}^\infty (E \cap A_i)) = \sum_{i=1}^\infty \mu(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu_E(A_i).$$

Portanto, μ_E é uma medida.

Exercício 6.5. Se μ^* é uma medida exterior em X e $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência disjunta de conjuntos μ^*-mensuráveis, então $\mu^*(E \cap (\cup_{j=1}^{\infty} A_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j)$, para todo $E \subset X$.

Solução: Dado $E \subset X$ temos que $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap A_j^c)$, $j = 1, 2, \cdots$. Mais ainda, pelo Teorema de Carathéodory, $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ também é μ^*-mensurável, isto é, $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (\cup_{j=1}^{\infty} A_j)) + \mu^*(E \cap (\cup_{j=1}^{\infty} A_j)^c)$.

Precisamos mostrar que $\mu^*(E \cap (\cup_{j=1}^{\infty} A_j)) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j)$. Logo, defina $B = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ e $B_n = \cup_{j=1}^{n} A_j$, então $B_n \subset B$, para todo $n \in \mathbb{N}$. O que implica que $(B_n \cap E) \subset (B \cap E)$ e, consequentemente, $\mu^*(E \cap B_n) \leq \mu^*(E \cap B)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, como $A_k \cap A_i \neq \emptyset$, $i \neq k$, temos que

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*((E \cap B_n) \cap A_n) + \mu^*((E \cap B_n) \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}).$$

Proceguindo como acima, para B_{n-1} obtemos que $\mu^*(E \cap B_{n-1}) = \mu^*(E \cap A_{n-1}) + \mu^*(E \cap B_{n-2})$. Dessa forma, em n passos, concluímos que $\mu^*(E \cap (\cup_{j=1}^{n} A_j)) = \mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j)$.

Utilizando que $\mu^*(E \cap B_n) \leq \mu^*(E \cap B)$ e fazendo $n \to \infty$ segue que $\mu^*(E \cap (\cup_{j=1}^{\infty} A_j)) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j)$ e, portanto, $\mu^*(E \cap (\cup_{j=1}^{\infty} A_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j)$.

Exercício 6.6. Se $E \in \mathcal{L}$ com $0 < m(E) < \infty$, então para cada $\alpha < 1$ existe A tal que $m(E \cap A) > \alpha m(A)$.

Solução: Por uma proposição anterior, temos que para $\epsilon > 0$ existe $A = \cup_{i=1}^{n} I_i$ tal que $m(A \triangle E) < \epsilon$. Como $A \cup E = (A \triangle E) \cup (A \cap E)$ então $m(A \cap E) = m(A \cup E) - m(A \triangle E) > m(A \cup E) - \epsilon$. Em particular, para $\epsilon = m(A \cup E) - \alpha m(A) > 0$ segue que $m(A \cap E) > \alpha m(A)$.

Exercício 6.7. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$, uma sequência de funções mensuráveis, então $\{x \in X :\ \text{existe} \ \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\}$ é um conjunto mensurável.

Solução: Seja $E = \{x \in X :\ \text{existe} \ \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\}$ e defina $f : E \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$. Logo, como f_n é mensurável, para todo $n \in \mathbb{N}$, em E, f é limite de funções mensuráveis e, portanto, f é mensurável em E. Disto segue que $E = f^{-1}(\mathbb{R}) \cap E$ pertence a σ-álgebra.

Exercício 6.8. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$, uma sequência de funções mensuráveis. Mostre que os conjuntos

- $A = \{x \in X : f_n(x) \to +\infty\}$;
- $B = \{x \in X : f_n(x) \to -\infty\}$;

são mensuráveis.

Solução: Como para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n é uma função mensurável e observando que A e B podem ser escritos da seguintes formas:

- $A = \cap_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}((n, +\infty))$, e
- $B = \cap_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}((-\infty, -n))$,

concluímos que A e B pertencem a σ-álgebra.

Exercício 6.9. Seja $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ a função característica de E. Mostre que χ_E é mensurável se, e somente se, E pertence a σ-ágebra.

Solução: Suponhamos $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ mensurável. Logo, segue imediatamente que $E = \chi^{-1}(\{1\})$ pertence a σ-álgebra.

Reciprocamente, supondo que E pertence a σ-álgebra. Então, dado $x \in \mathbb{R}$ temos que

$$\chi_E^{-1}([x, +\infty)) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } x > 1; \\ E, & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ X, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

O que implica que $\chi_E^{-1}([x, +\infty))$ pertence a σ-álgebra para todo $x \in \mathbb{R}$ e, portanto, χ_E é mensurável.

Exercício 6.10. Considere $X = \mathbb{R}$ com a σ-álgebra de Borel e a medida de Lebesgue. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $f_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [0, n]; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{n\to+\infty} f_n$.

(b) Calcule $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n dm$.

Solução: **(a)** Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que implica que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Como $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]} \in L^+$ é uma função simples, temos que

$$\int_X f_n dm = \frac{1}{n} m([0, n]) = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

O que implica que $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n dm = 1$.

Exercício 6.11. Seja $X = [0, +\infty)$ com a σ-álgebra de Borel a a medida de Lebesgue. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & x \in [n, 2n]; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{n\to+\infty} f_n$.

(b) Calcule $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n dm$.

(c) A sequência $\{f_n\}$ contradiz o lema de Fatou?

Solução: **(a)** Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{n} \leq f_n(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que implica que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Temos que $f_n = f_n^+ - f_n^-$, onde $f_n^+ \equiv 0$ e $f_n^- = \frac{1}{n}\chi_{[n,2n]}$. Logo, $\int_X f_n^+ dm = 0$ e $\int_X f_n^- dm = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica que $f_n \in L^1$ e $\int_X f_n dm = -\int_X f_n^- dm = -1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n dm = -1$.

(c) Não, pois $\{f_n\}$ não pertence à L^+.

Exercício 6.12. Com as mesmas hipóteses do Teorema da convergência dominada mostre que $\lim_{n\to+\infty} |f_n - f| d\mu = 0$.

Solução: Suponha que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ tal que $f_n \to f$ q.s. e existe $g \in L^+ \cap L^1$ com $|f| \leq g$ q.s.. Logo, pelo Teorema da convergência dominada, temos que $f \in L^1$ e $\int f = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$.

Mais ainda, como $-(f_n - f) \leq |f_n - f| \leq (f_n - f)$ segue que $\int f - \int f_n = \int -(f_n - f) \leq \int |f_n - f| \leq \int (f_n - f) = \int f_n - \int f$. O que implica que

$$0 = \int f - \int f = \lim_{n\to+\infty} \left(\int f - \int f_n \right) \leq \lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\int f_n - \int f \right) = \int f - \int f = 0$$

e, portanto, $\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| = 0$.

7 Apêndice: o problema do jogador

Como exemplo de uma aplicação da teoria da medida, sugerimos que leia o artigo [3], incluímos neste apêndice, uma breve descrição dos estudos sobre tal artigo.

Nos cursos de cálculo estudamos que funções contínuas da reta na reta nem sempre são deriváveis. Em cursos mais avançados de análise aprendemos que funções contínuas e monótonas são sempre deriváveis em quase todo ponto (no sentido de Lebesgue), todavia o conjunto dos pontos onde a função não é derivável pode ser relativamente grande.

O exemplo mais simples é a escada de Cantor, que é contínua, crescente, vale 0 em 0 e 1 em 1, mas tem derivada zero em quase todo ponto. Neste caso o conjunto dos pontos onde a função não é derivável será denso e não enumerável apesar de ter medida zero.

A maioria das pessoas podem achar que são funções estranhas ou artificiais e que nunca aparecem "na prática". Este trabalho foi motivado querendo desmentir esta opinião.

A maioria das pessoas envolvidas com matemática sabem que uma função contínua nem sempre é diferenciável. Aquelas com um conhecimento um pouco mais aprofundado sabem também que uma função contínua e monótona é diferenciável em quase todos os pontos (a menos de um conjunto de medida nula). O exemplo mais simples é a escada de Cantor, que é contínua, crescente (mas não estritamente), vale 0 em 0 e 1 em 1, mas tem derivada zero em quase todos os pontos.

Todavia, as pessoas tem em mente que tais funções são funções muito estranhas ou artificiais e que não aparecem em problema elementares.

Neste trabalho mostraremos que é possível, a partir de um problema simples, obter uma função contínua, estritamente crescente, valendo 0 em 0 e 1 em 1, cuja a derivada existe e é zero em quase todos os pontos.

O problema do jogador

Suponhamos que um jogador precisa de uma quantia a. Ao amanhecer para pagar seus credores (mafiosos, que responderão com a morte a qualquer atraso no pagamento), mas ele infelizmente não dispõe desta fortuna, mesmo depois dos mais desesperados esforços conseguiu juntar apenas xa (e, infelizmente, $x < 1$). Sua única esperança é fazer seu dinheiro crescer apostando no novo cassino da sua cidade, o cassino de Cantor.

Neste cassino, o freguês pode fazer aposta de qualquer valor e ganhando, recebe o dinheiro apostado em dobro. A probabilidade de ganhar qualquer aposta é p, com $p \in [0, 1]$. Qual é a probabilidade de sucesso deste jogador em função de x?

Suponhamos que um jogador precisa de uma quantia a, mas só dispõe do valor xa $(0 < x < 1)$ e sua única esperança é fazer seu dinheiro crescer apostando no novo cassino da sua cidade, o cassino de Cantor. Neste cassino, o freguês pode fazer aposta de qualquer valor e ganhando, recebe o dinheiro apostado em dobro com probabilidade de ganhar em qualquer aposta igual a $p \in (0, 1)$. Qual é a probabilidade de sucesso deste jogador em função de x?

A estratégia adotada pelo jogador é a seguinte: Quando ele tem menos de $a/2$ aposta tudo e quando tem pelo menos $a/2$, aposta o suficiente para, ganhando, chegar a a imediatamente. Assim, se $f_p(x)$ é a probabilidade de sucesso para um dado valor x (note que $f_p(0) = 0$ e $f_p(1) = 1$) temos que:

(i) Se $0 < x < 1/2$ ($xa < a/2$) então ele aposta tudo e atinge o valor $2x < 1$ com probablidade p, ou seja, $f_p(x) = p \cdot f_p(2x)$;

(ii) Se $1/2 \leq x < 1$ então ele aposta um valor $s = x - r$ tal que $2s + r = 1$, o que resulta em $r = 2x - 1$. Logo, ele atinge o valor 1 com probabilidade p ou ele perde e fica com o valor $r = 2x - 1$ com probablidade $1 - p$, ou seja, $f_p(x) = p + (1 - p) \cdot f_p(2x - 1)$.

Disto segue que a função $f_p(x)$ é definida implicitamente por

$$f_p(x) = \begin{cases} p \cdot f_p(2x), & se \quad x \leq 1/2; \\ p + (1-p) \cdot f_p(2x-1), & se \quad x \geq 1/2. \end{cases}$$

Esta fórmula define uma função nos racionais diáticos (racionais na forma $\frac{m}{2^n}$, onde $m, n \in \mathbb{Z}_+$), por exemplo, $f_p(3/4) = p + (1-p)p$, $f_p(1/2) = p$ e $f_p(1/4) = p^2$.

Vamos mostrar que f_p estende-se continuamente ao intervalo $[0, 1]$, que f_p (estendida) é estritamente crescente e sua derivada é igual a zero sempre que estiver definida.

Considere a diferença entre dois racionais diáticos próximos:

$$f_p\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m}{2^n}\right) = \begin{cases} p \ \left(f_p\left(\frac{m+1}{2^{n-1}}\right) - f_p\left(\frac{m}{2^{n-1}}\right)\right), & se \quad m \leq 2^{n-1}; \\ (1-p) \ \left(f_p\left(\frac{m-2^{n-1}+1}{2^{n-1}}\right) - f_p\left(\frac{m-2^{n-1}}{2^{n-1}}\right)\right), & se \quad m \geq 2^{n-1}. \end{cases}$$

Vamos definir uma função auxiliar:

Definição 7.1. *Seja $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por $F(0) = 0$, $F(2m) = F(m)$ e $F(2m+1) = 1 + F(m)$ para $m \in \mathbb{N}$.*

A partir da Definição 7.1 encontramos um método para calcular $F(n)$ para qualquer n dado: $F(0) = 0$, $F(1) = 1 + F(0) = 1$, $F(2) = F(1) = 1$, $F(3) = 1 + F(1) = 2$.

Juntando as fórmulas recursivas temos, por indução,

$$f_p\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m}{2^n}\right) = p^{n-F(m)}(1-p)^{F(m)}.$$

Vamos enunciar alguns lemas para organizar nossas conclusões.

Lema 7.2. *Seja p um número real com $0 < p \leq 1/2$. Existe uma única função contínua e estritamente crescente $f_p : [0, 1] \to [0, 1]$ com $f_p(0) = 0$ e $f_p(1) = 1$ satisfazendo a seguinte identidade para quaisquer naturais m e n com $m < 2^n$:*

$$f_p\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m}{2^n}\right) = p^{n-F(m)}(1-p)^{F(m)}.$$

Demonstração. A identidade acima define o valor de f_p para os racionais diáticos:

$$f_p\left(\frac{m}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} p^{n-F(k)}(1-p)^{F(k)}.$$

Novamente pela identidade, temos que

$$0 < f_p\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m}{2^n}\right) \leq (1-p)^n, \tag{7.2}$$

desta estimativa podemos concluir que existe uma forma de estender continuamente (e de maneira única) a função f_p no intervalo $[0,1]$. Da equação 7.2, segue que f_p é estritamente crescente nos racionais diáticos, além disso, como o conjunto dos racionais diáticos é denso em $\mathbb{R}$ temos que f_p é estritamente crescente. $\square$

A partir de agora usaremos a notação f_p para nos referirmos à função construída no Lema 7.2. Observe que $f_{\frac{1}{2}}(x) = x$.

A seguinte fórmula mais direta segue facilmente do lema anterior: se

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{2^n}, \;\; \delta_n \in \{0,1\},$$

então

$$f_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n p^{n-\sum_{j=1}^{n}\delta_j}(1-p)^{\sum_{j=1}^{n}\delta_j}.$$

Lema 7.3. *A função f_p satisfaz a identidade abaixo para todo $x \in [0,1]$:*

$$f_p(x) = \begin{cases} p f_p(2x) \;, & \textit{se} \quad x \le 1/2; \\ p + (1-p) f_p(2x-1) \;, & \textit{se} \quad x \ge 1/2. \end{cases}$$

Demonstração. Demonstramos a identidade acima para os racionais diáticos por indução no expoente do denominador, a identidade vale para qualquer número real, pois f_p é contínua. $\square$

A derivada de f_p

Nesta seção mostraremos que $f_p'(x) = 0$ sempre que esta derivada estiver definida, o que ocorre para quase todo $x \in [0,1]$ (no sentido de medida de Lebesgue).

Teorema 7.4. *Se $x_0 \in (0,1)$ um ponto onde f_p é derivável, então $f_p'(x_0) = 0$.*

Demonstração. Sejam $d = f_p'(x_0)$ e m_n uma sequência de inteiros com $m_0 = 0$ e $m_{n+1} = 2m_n$ ou $m_{n+1} = 2m_n + 1$ tal que $\frac{m_n}{2^n} \le x_0 \le \frac{m_n+1}{2^n}$.

Temos

$$\begin{aligned} d &= \lim_{n\to\infty} \frac{f_p(\frac{m_n+1}{2^n}) - f_p(\frac{m_n}{2^n})}{\frac{m_n+1}{2^n} - \frac{m_n}{2^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^n \left(f_p\left(\frac{m_n+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m_n}{2^n}\right)\right). \end{aligned}$$

Se definirmos

$$c_n = \begin{cases} 2p \;, & \textit{se} \quad m_{n+1} = 2m_n, \\ 2(1-p) \;, & \textit{se} \quad m_{n+1} = 2m_n + 1, \end{cases}$$

temos

$$2^n \left(f_p \left(\frac{m_n + 1}{2^n} \right) - f_p \left(\frac{m_n}{2^n} \right) \right) = \Pi_{k=0}^{n-1} c_k$$

donde

$$d = \Pi_{k=0}^{\infty} c_k.$$

Mas como c_k alterna entre dois valores, ambos diferentes de 1, este produto infinito não pode convergir a não ser tendendo para 0, e temos portanto $d = 0$. $\square$

Como já mensionamos na introdução, é um teorema clássico que toda função crescente é derivável em quase todo ponto, em particular, $f_p'(x) = 0$ para quase todo x.

Referências

[1] Folland, Gerald B., Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. John Wiley & Sons, New York, EUA, 1999.

[2] Royden, H. L., Real Analysis. John Wiley & Sons, New York, EUA, 1968.

[3] Saldanha, N. C.; Svetlichny, G.; Moreira, C. G. T. A. O cassino de Cantor, Revista Matemática Universitária número 28, p. 67-76, junho 2000.